This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

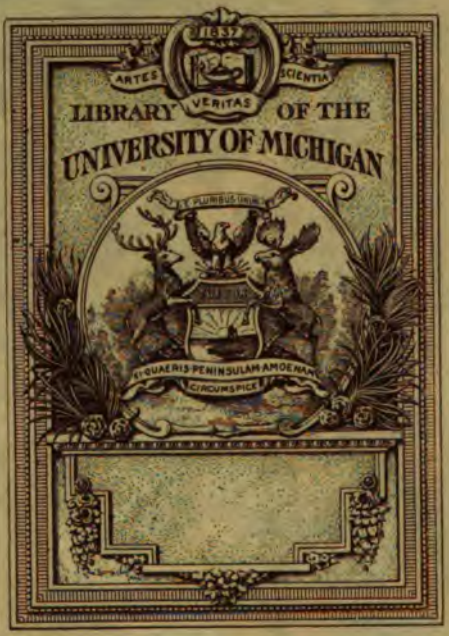
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 481318

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

QA
84.1
.B77
v.2

Digitized by Google

Digitized by Google

P. BOURGUIGNON
Professeur à l'École des Arts et Métiers d'Angers.

COURS

DE

CINÉMATIQUE

THÉORIQUE & APPLIQUÉE

II. — CINÉMATIQUE APPLIQUÉE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DES ÉCOLES DES ARTS ET MÉTIERS

Avec 402 figures dans le texte

PARIS
HENRY PAULIN ET Cie, ÉDITEURS
21, RUE HAUTEFEUILLE (6e)

1906

Digitized by Google

Digitized by Google

COURS

DE

Cinématique théorique et appliquée

Digitized by Google

Digitized by Google

COURS

DE

CINÉMATIQUE

THÉORIQUE & APPLIQUÉE

PAR

P. BOURGUIGNON
Professeur à l'École des Arts et Métiers d'Angers.

II. — CINÉMATIQUE APPLIQUÉE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DES ÉCOLES DES ARTS ET MÉTIERS

Avec 402 figures dans le texte.

PARIS
HENRY PAULIN ET Cie, ÉDITEURS
21, RUE HAUTEFEUILLE (6e)

1906

Tous droits réservés.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRÉFACE

L'ouvrage que M. Bourguignon m'a demandé de présenter au public, et que je suis heureux de faire connaître, se distingue surtout par le soin que l'auteur apporte aux applications des mécanismes, sans pour cela diminuer l'importance de leur théorie.

C'est ainsi qu'après une étude très serrée des engrenages hyperboliques, question surtout théorique, vient un chapitre fort utile consacré au filetage, aux trains épicycloïdaux et à leurs applications à l'automobile.

Le problème des engrenages est résolu d'une façon très complète et le tracé de tous les types pratiques est complètement indiqué.

Dans chaque question la solution qui satisfait complètement aux conditions de l'énoncé est d'abord établie; ensuite l'auteur montre le degré d'approximation que le praticien peut atteindre à l'aide des moyens actuels. Cette progression met bien en relief les qualités d'exposition et de méthode qui forment la base de tout enseignement.

Aussi je suis convaincu que l'étude de ce traité sera des plus fructueuses pour les élèves de nos écoles industrielles et, en général, pour toutes les personnes qui s'occupent d'installations mécaniques.

J. Geffroy,
Ancien élève de l'École d'Arts et Métiers de Châlons,
Ingénieur des Arts et Manufactures,
Répétiteur à l'École Centrale.

Digitized by Google

174695

Digitized by Google

AVERTISSEMENT

Le traité de cinématique que nous présentons au lecteur est entièrement conforme aux derniers programmes officiels des écoles d'Arts et Métiers. La table analytique des matières indiquant suffisamment la marche que nous avons suivie, nous ne croyons pas qu'il soit utile de la reprendre une nouvelle fois. Nous mentionnerons cependant les développements très étendus, mais toujours rigoureux, que nous avons donnés du tracé des engrenages, et si parfois nous sommes allés un peu loin dans cette théorie, c'est uniquement pour mieux éclairer l'esprit de nos élèves et les mettre à même de retenir avec plus de facilité les matières qui leur seront indispensables à leur sortie de l'école. Nous les engageons vivement à lire, dans leurs moments de loisir, les ouvrages qui nous ont parfois inspiré de MM. Haton de la Goupillère, Kœnigs, Puiseux, Reuleaux, Sonnet et ceux de tous nos collègues des écoles d'Arts et Métiers. Les premiers présentent des développements très instructifs sur certaines parties de la cinématique qui ne sont pas du domaine des programmes qui nous sont imposés.

Qu'il nous soit permis d'adresser ici l'expression de notre reconnaissance à M. Geffroy, répétiteur à l'École Centrale, qui veut bien présenter notre livre à nos collègues et aux élèves de l'enseignement technique, et à M. G. Richard, secrétaire de la rédaction de la *Revue de Mécanique* à l'Exposition de 1900, pour la note qui vient en appendice, et qu'il a eu l'extrême obligeance de nous communiquer. Elle lui appartient intégralement et donne la description de quelques machines modernes destinées à tailler les engrenages.

Nous tenons aussi à adresser tous nos remerciements : aux maisons Citroën Hinstin et Piat, pour les clichés qu'elles ont mis si gracieusement à notre disposition ; à la maison des Corderies de la Seine, au

Digitized by Google

Havre, qui a bien voulu nous fournir des renseignements précis sur les transmissions par câbles et aussi à notre collègue et ami M. Gourdou, professeur de dessin à l'École d'Arts et Métiers d'Angers, dont les heureux conseils nous ont souvent guidé dans la disposition et l'exécution des figures.

Angers, le 28 janvier 1906.

P. BOURGUIGNON.

Digitized by Google

CINÉMATIQUE APPLIQUÉE

LIVRE PREMIER

—

PREMIER GENRE

TRANSMISSION PAR CONTACT IMMÉDIAT

—

PREMIÈRE CLASSE

APPAREILS OÙ LE SENS DE LA TRANSMISSION EST CONSTANT AINSI QUE LE RAPPORT DES VITESSES DES ORGANES EN LIAISON.

—

CHAPITRE PREMIER

—

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES. — CLASSIFICATION DES MÉCANISMES

1. Mécanisme, machine. — Un *mécanisme* est un ensemble de corps résistants assujettis à des liaisons.

Une *machine* est un mécanisme sur lequel on fait agir des forces ; elle est *cinétique* si leur introduction donne naissance à un mouvement, *statique* dans le cas contraire.

2. Degré de liberté d'un système. — En cinématique théorique, nous avons établi que le mouvement le plus général d'un système invariable S_1 par rapport à un autre système S_2 était un mouvement hélicoïdal. Sa position dépend donc de six paramètres et si, par suite des liaisons établies, ce nombre devient inférieur à six, les deux systèmes constituent un système *binaire* dont le degré de liberté est marqué par le nombre de paramètres qui restent indépendants.

Digitized by Google

3. Couples d'éléments cinématiques. — Dans un mécanisme, deux surfaces invariablement liées à deux corps contigus et qui permettent de les maintenir en contact suivant certaines conditions, constituent un *couple d'éléments cinématiques conjugués*. Exemples: Des tourillons et des coussinets, des dents d'engrenages, une vis et son écrou.

Un couple d'éléments cinématiques conjugués est dit: parfait si aucun mouvement ne peut le dissocier, imparfait dans le cas contraire. Une vis et son écrou constituent un couple parfait, accidentellement imparfait.

Tout procédé quel qu'il soit qui empêche dans un couple les mouvements dissociatifs de se produire porte le nom de *clôture*.

4. Chaînes cinématiques. — Si nous réunissons deux à deux plusieurs couples d'éléments cinématiques, nous obtenons une *chaîne cinématique* dont les membres sont les corps eux-mêmes qui ont permis la réalisation de la réunion. Comme exemple de chaîne cinématique considérons quatre couples identiques formés chacun d'un cylindre plein et d'un cylindre creux de rayons peu différents et relions par des tiges rigides les cylindres pleins d'une part et les cylindres creux d'autre part; nous obtenons alors la chaîne cinématique à quatre membres indiquée par la figure 1. Elle est à liaisons complètes car, si nous fixons l'un de ses membres de manière à la transformer en mécanisme et si nous communiquons des mouvements aux membres adjacents au support, le quatrième membre prend un mouvement unique bien déterminé. Dans le cas contraire la chaîne est à liaisons incomplètes.

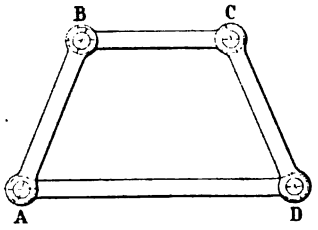


Fig. 1.

Il résulte de ce qui précède qu'il y a autant de manières de transformer une chaîne cinématique en mécanisme qu'il y a de membres à la chaîne.

5. Chaîne simple, chaîne composée. — Si chaque membre d'une chaîne ne réunit que deux éléments de couples, elle est dite *simple*; c'est le cas du quadrilatère articulé précédent. Dans le cas de la figure 2, où cette condition n'est pas remplie, la chaîne est dite *composée*.

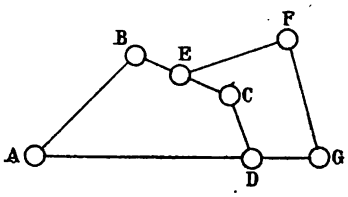


Fig. 2.

6. Classifications des mécanismes. — *a)* Classification de

Digitized by Google

Monge. — L'étude des mécanismes s'est faite longtemps suivant une classification due à Monge; elle est aujourd'hui complètement abandonnée. Il envisageait un mécanisme comme un moyen de transformer un mouvement donné en un autre mouvement connu sans se préoccuper des relations établies entre les divers éléments du système; de ce fait même il plaçait dans une même classe tous les organes qui permettaient de réaliser la transformation de mouvement demandé. Comme d'ailleurs dans les machines il y avait lieu de distinguer les mouvements rectilignes continus R.C ou alternatifs R.A, et les mouvements circulaires continus C.C ou alternatifs C.A, sa classification comportait dix classes; à savoir:

1°	Transformation	d'un mouvement	R.C	en un mouvement	R.C
2°	—	—	R.C	—	R.A
3°	—	—	R.C	—	C.C
4°	—	—	R.C	—	C.A
5°	—	—	R.A	—	R.A
6°	—	—	R.A	—	C.C
7°	—	—	R.A	—	C.A
8°	—	—	C.C	—	C.C
9°	—	—	C.C	—	C.A
10°	—	—	C.A	—	C.A

Elle présentait le grave inconvénient de rapprocher des mécanismes dissemblables et de séparer parfois ceux qui, au contraire, avaient entre eux une grande analogie; elle permettait aussi parfois de ranger un même mécanisme dans plusieurs classes. Elle est aujourd'hui remplacée par celle de Willis, plus scientifique, mais sujette aussi à bien des critiques.

b) Classification Willis. — Willis, dans sa classification, a fait le premier intervenir la constitution du mécanisme en remarquant que l'on peut transmettre le mouvement d'un corps à l'autre, par contact immédiat de roulement ou de glissement, par l'intermédiaire d'un lien rigide ou par l'intermédiaire d'un lien flexible. De là sa division en trois genres subdivisés chacun en trois classes en adoptant les idées de Monge. Le tableau suivant la résume :

Digitized by Google

	SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT		SENS DE LA TRANSMISSION PÉRIODIQUEMENT VARIABLE
	PREMIÈRE CLASSE Rapport des vitesses constant.	DEUXIÈME CLASSE Rapport des vitesses variable.	TROISIÈME CLASSE Rapport des vitesses constant ou variable.
PREMIER GENRE Transmission par contact immédiat.	Engrenages cylindriques extérieurs. — — intérieurs. Pignons et crémaillères. Engrenages coniques. — hyperboloïdaux. — hélicoïdaux. Equipages ou trains de roues dentées. Trains épicycloïdaux.	Surfaces roulantes. — dérivées des précédentes. Engrenage intermittent des compteurs.	Cames des pilons ou des marteaux. Cames quelconques. Excentriques à cadre.
DEUXIÈME GENRE Transmission par l'intermédiaire d'un lien rigide.	Bielle reliant deux manivelles égales.	Bielle reliant deux manivelles inégales et réalisant les transformations suivantes : Mouvement C.C en C.C — C.C en C.A — C.A en C.A Joint universel. Double joint de Hooke. Joint de Cardan. — de Goubet. — de Clémens.	Engrenage de Lahire. Tige guidée et manivelle reliées par une bielle. Excentrique circulaire. Parallélogramme de Watt. — de Peaucellier. — de Hart. — de Klérity. — d'Olivier Ewans.
TROISIÈME GENRE Transmission par l'intermédiaire d'un lien flexible.	Poulie fixe. — mobile. Poulies accélératrices. Treuil. Moufles. Palans. Cordes et chaînes.	Treuils spéciaux. Bobines.	Poulies avec tendeur oscillant.

Digitized by Google

c) Classification de M. Haton de la Goupillière. — Laissant de côté la transformation de mouvement réalisée par un mécanisme et ne s'occupant que de sa constitution et des relations établies entre ses membres, M. Haton de la Goupillière proposa de conserver les trois genres de Willis et de subdiviser le premier en trois groupes relatifs aux organes à roulement, à glissement simple, à glissement mixte. Malheureusement, dans un mécanisme, il y a plusieurs contacts dont les natures sont parfois différentes et qui conduisent à le classer tantôt dans un groupe, tantôt dans un autre, en sorte que la classification résultante était sujette encore à bien des critiques.

d) Classifications de MM. Reuleaux et Kœnigs. — S'appuyant sur quelques principes généraux fournis par l'expérience, M. Reuleaux, directeur de l'Académie industrielle de Berlin, dans un ouvrage paru en France en 1877 a donné des mécanismes une étude absolument scientifique. Elle est aujourd'hui reprise par M. Kœnigs, professeur de mécanique physique et expérimentale à la Sorbonne. Se débarrassant des restrictions de Reuleaux, il expose les premiers principes de son traité dans un ouvrage récemment paru en librairie auquel nous avons emprunté les définitions qui précèdent.

Leurs conceptions à tous deux sont d'un ordre trop élevé pour les élèves des écoles d'arts et métiers destinés à faire des praticiens et non des théoriciens. Pour cette raison et dans l'obligation de nous conformer à un programme officiel, nous suivrons dans notre exposition la classification de Willis.

Digitized by Google

CHAPITRE II

—

THÉORIE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES EXTÉRIEURS

7. Cylindres de friction. — Les engrenages cylindriques extérieurs ont pour objet de transformer un mouvement de rotation donné en un second mouvement de rotation parallèle au premier, de sens contraire et tel que le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ de leurs vitesses angulaires soit constant, par l'intermédiaire de corps assujettis à rester en contact et choisis de façon que le frottement du glissement qui résulte de leur liaison soit le moindre possible.

Ce problème résolu en cinématique théorique § 201, nous a conduits à caler sur les deux arbres de rotation deux cylindres extérieurs de révolution ayant une génératrice commune, même plan tangent tout le long de cette génératrice et dont les rayons R_1 et R_2 satisfont à la relation :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Ce mode de transmission de mouvement serait parfait si les deux cylindres de friction étaient, comme nous l'avons supposé, des systèmes invariables. En réalité il n'en est rien et la nécessité de les maintenir fortement pressés l'un contre l'autre, de manière à développer une force de frottement capable de vaincre la résistance qui s'oppose à leur mouvement, produit une déformation de leurs surfaces latérales et modifie par cela même les conditions de la transmission. Au bout d'un certain temps on se trouve même dans l'obligation de rapprocher leurs axes pour obtenir à nouveau le contact.

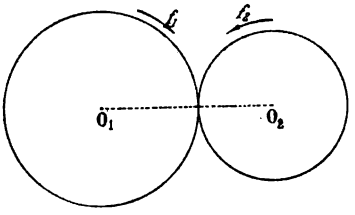


Fig. 3.

Malgré ces inconvénients, les roues de friction sont employées dans

Digitized by Google

la conduite d'appareils marchant à grande vitesse, comme les essoreuses par exemple, ou bien encore dans les cas où l'action directe de la force

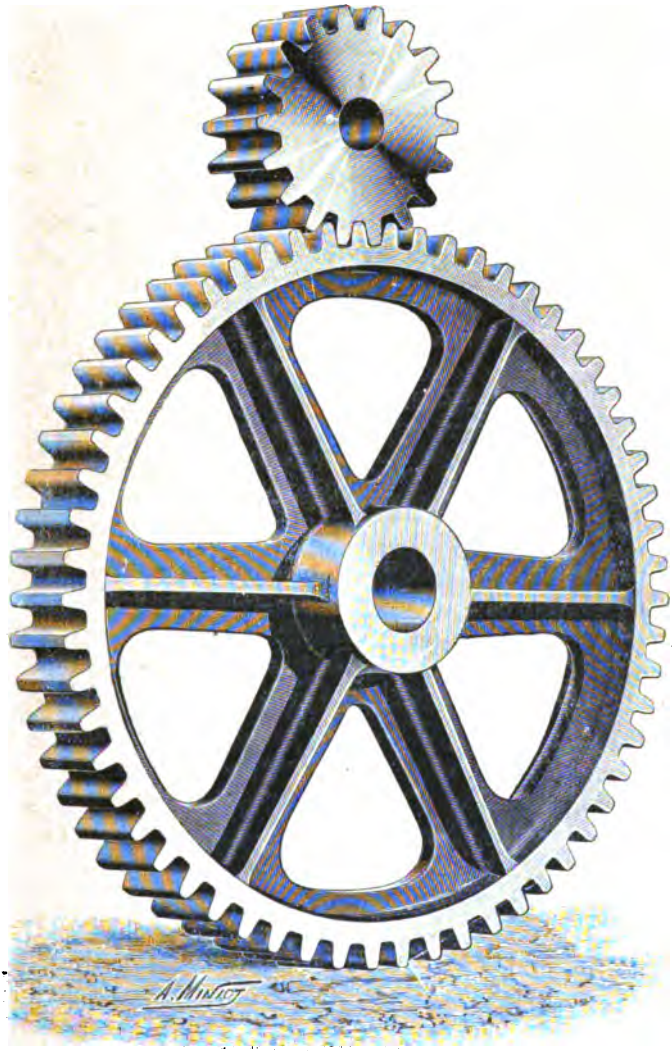


Fig. 4.

motrice sur de grandes masses peut donner naissance à des chocs et ébranlements capables d'occasionner des ruptures. Par suite du glissement relatif qu'elles peuvent prendre, on conçoit facilement comment elles communiquent peu à peu à ces masses les vitesses considérables qu'elles doivent finalement posséder.

Digitized by Google

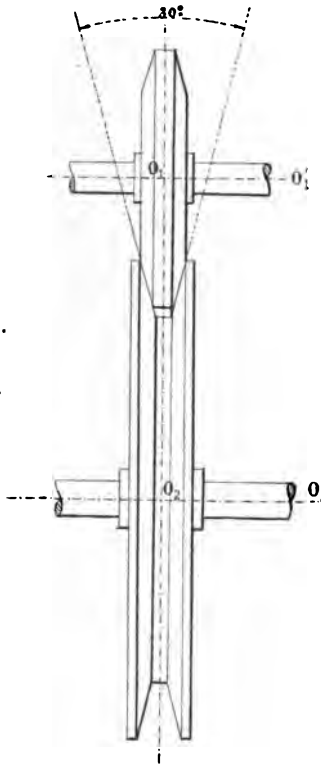


Fig. 5.

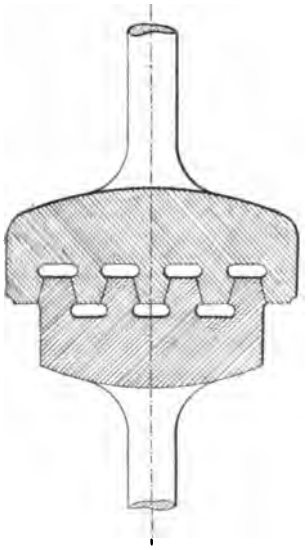


Fig. 6

Dans les cas où l'effort à transmettre est considérable, on arme leurs *surfaces primitives* de parties saillantes appelées dents, laissant entre elles des vides de telle façon que les pleins de l'une des roues s'engageant dans les vides de l'autre puissent agir sur les parties saillantes de cette dernière et assurer ainsi la transmission de mouvement.

8. Roues à coins. — Les roues à coins offrent un exemple de transmission par contact immédiat dans lequel on augmente l'adhérence des surfaces en contact en découpant dans la surface latérale de l'un des cylindres des coins qui viennent s'engager dans des gorges tronconiques inclinées de 30° environ pratiquées sur la surface latérale de l'autre roue.

Une usure rapide se produit dans cet engrenage par suite du glissement forcé des surfaces en contact ; il n'y a en effet, sur une gorge et sur le coin correspondant qu'un point pour lequel la relation :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

est vérifiée ; les autres points, considérés comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux roues, ont donc des vitesses différentes et les surfaces en contact glissent bien l'une sur l'autre. Leur usure au bout d'un certain temps devient telle qu'on se trouve dans l'obligation de rapprocher les axes des deux roues pour mettre à nouveau leurs surfaces en contact.

On peut toutefois remédier à cet inconvénient en employant l'artifice suivant dû à Minotto : Sur les deux arbres O_1 et O_2 (fig. 7) entre lesquels nous

Digitized by Google

devons transmettre le mouvement, on cale deux roues à gorge; puis entre elles on place une roue O_3 à coins, folle autour de son axe, et on la maintient en contact avec les deux précédentes par l'intermédiaire d'un contrepoids. La roue motrice O_1 entraîne alors la roue auxiliaire O_3 qui,

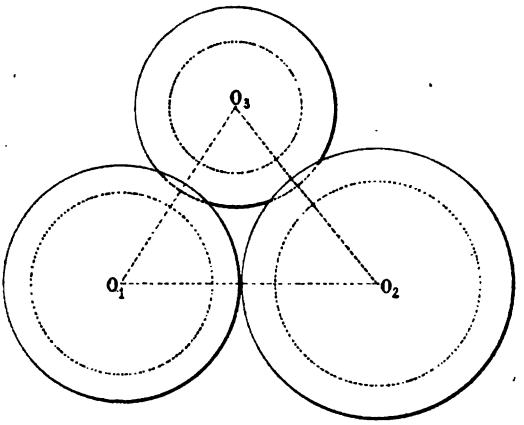


Fig. 7.

à son tour, communique à la roue O_2 son mouvement sans qu'il soit nécessaire de rapprocher à un moment donné les arbres O_1 et O_3.

Les roues à coins sont utilisées en Amérique dans les machines élévatoires et à bord des navires pour la commande des treuils par suite de leur facilité à l'embrayage et au désembrayage.

9. Pas circonférentiel. — Les deux roues d'un engrenage se distinguent l'une de l'autre : celle qui est calée sur l'arbre moteur est la *roue menante* ; l'autre est la *roue menée*. Parfois même, on réserve le nom de roue au cylindre de friction qui a le plus grand rayon et l'on désigne l'autre sous le nom de *pignon*. Leurs sections par un plan perpendiculaire aux axes de rotation sont les circonférences primitives de l'engrenage.

Pour surfaces des dents, il est naturel d'adopter des cylindres dont les génératrices sont parallèles aux axes de rotation et dont les directrices AB, CD (fig. 9), tracées sur un plan perpendiculaire aux axes, portent le nom de *profils*. Les deux cylindres de révolution qui les limitent sont concentriques à la roue et portent les noms de *cylindres d'échanfrinement et d'évidement*. Leurs sections droites BC, AD, qui sont les circonférences d'échanfrinement et d'évidement des dents, limitent les profils extérieurement et intérieurement à la circonférence primitive.

Digitized by Google

La surface d'une dent est divisée en deux parties par le cylindre primitif : sa *tête* correspond à la partie extérieure à ce cylindre, son *pied* à la partie intérieure. La surface d'échanfrinement qui limite sa tête en est le *sommet* ; celle d'évidement qui limite son pied en est la *base* ou *racine*.

A chaque dent correspondent deux profils AB et CD. La rotation de la roue O_1 s'effectuant, par exemple, dans le sens de la flèche f_1, on pourrait à la rigueur laisser quelconque la face postérieure AB qui ne travaille pas. Mais, comme en pratique, il convient qu'une même roue puisse être à la fois menante et menée et cela quel que soit son sens de rotation, on donne aux dents de l'autre roue des profils A'B', C'D' respectivement *conjugués* des précédents. On parvient d'ailleurs d'une façon très simple à ce résultat, et on simplifie par ce procédé même l'épure du tracé des dents, en établissant une relation entre les deux profils AB et CD d'une même dent : on les dispose symétriquement par rapport au rayon qui passe par le milieu E de son épaisseur $\alpha\beta$ et on donne à leurs conjugués une disposition analogue. L'engrenage correspondant est alors dit *réciproque*.

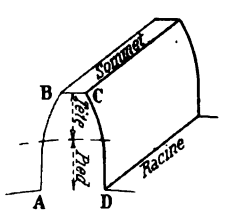


Fig. 8.

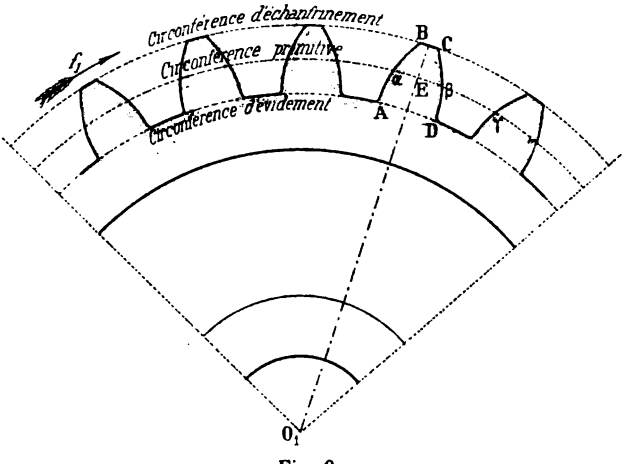


Fig. 9.

L'arc $\alpha\gamma$ de circonférence primitive, compris entre deux dents consécutives, porte le nom de *pas circonférentiel* ; nous le désignerons dans la suite par la lettre p. Il se subdivise en trois parties : *le plein, le vide et le jeu*.

Digitized by Google

Le *plein* est l'arc $\alpha\beta$ de circonférence primitive compris entre les deux profils AB et CD d'une même dent.

Le *vide* $\beta\gamma$ est l'arc de circonférence primitive compris entre deux pleins consécutifs.

Le *jeu* est un vide auxiliaire qui vient s'ajouter au précédent et qui donne aux dents de l'une des roues une facilité plus grande pour s'introduire dans les creux de l'autre. Théoriquement, il n'est pas indispensable; nous l'adopterons cependant dans les épures qui vont suivre pour nous conformer à la pratique et nous lui donnerons une longueur assez faible pour que la roue motrice qui, après le changement de sens de rotation, marche à vide pendant un certain temps, ne puisse acquérir une vitesse capable de déterminer la rupture des dents de l'engrenage au moment où les deux roues viennent de nouveau en contact. Pour ces raisons nous le ferons varier en général entre $\frac{p}{12}$ et $\frac{p}{16}$.

D'après le principe de l'action et de la réaction, les dents des deux roues doivent résister au même effort; leurs épaisseurs, fonctions de la résistance à vaincre, sont donc inversement proportionnelles aux résistances spécifiques des substances qui les composent. Leur détermination dépendant du cours de résistance des matériaux, nous pourrons les regarder comme des données dans tous les calculs qui vont suivre.

Si les dents des deux roues sont de même matière elles ont même épaisseur e et comme un plein de l'une doit s'introduire dans un creux de l'autre, le pas est le même sur les deux roues et a pour expression:

$$p = 2e + \frac{p}{12} \qquad \text{ou :} \qquad p = 2e \times \frac{12}{11}.$$

Dans le cas contraire, si e_1 et e_2 désigne les épaisseurs :

$$p = e_1 + e_2 + \frac{p}{12}$$

ou :

$$p = \frac{12}{11}(e_1 + e_2).$$

10. Projet d'engrenage cylindrique. — *Déterminer les rayons* R_1 *et* R_2 *des cylindres primitifs d'un engrenage cylindrique, les nombres de dents* Z_1 *et* Z_2 *de chacune des roues, en fonction de la distance* $O_1O_2 = d$ *des arbres de rotation, des nombres de tours* n_1 *et* n_2 *qu'ils font respectivement en une minute, par exemple, et de l'épaisseur e des dents que nous supposons de même substance.*

a) Calcul des rayons des roues. — Les inconnues étant au nombre

Digitized by Google

de deux, il nous faut poser deux équations pour les trouver. La première :

$$R_1 + R_2 = d$$

exprime que la distance des arbres est égale à d.

La seconde :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

résulte du problème résolu *en cinématique théorique*, § 201.

En les résolvant, nous obtenons :

$$R_1 = \frac{dn_2}{n_1 + n_2}$$

$$R_2 = \frac{dn_1}{n_1 + n_2}.$$

b) Calcul de Z_1 et Z_2. — Le pas p de l'engrenage étant connu et ayant pour expression :

$$p = 2e \times \frac{12}{11}.$$

Les équations qui permettent de déterminer Z_1 et Z_2 peuvent s'écrire :

$$2\pi R_1 = Z_1 \times p$$
$$2\pi R_2 = Z_2 \times p.$$

A cette dernière nous pouvons substituer la suivante obtenue en divisant membre à membre les deux précédentes :

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Nous en déduisons alors :

$$Z_1 = \frac{2\pi R_1}{p}$$

$$Z_2 = \frac{n_1 Z_1}{n_2}.$$

Z_2 devant être entier, n_2 doit diviser le produit $n_1 Z_1$ et comme nous pouvons toujours le supposer premier avec n_1, il en résulte qu'il doit diviser Z_1. Nous pouvons donc poser :

$$Z_1 = n_2 \times k$$

alors :

$$Z_2 = n_1 \times k$$

k étant un nombre entier qui reste à calculer et qui est déterminé par l'équation :

$$\frac{2\pi R_1}{p} = n_2 \times k$$

Digitized by Google

de laquelle nous déduisons :

$$k = \frac{2\pi R_1}{pn_2}.$$

Ou bien $2\pi R_1$ est un multiple de pn_2 et le problème est résolu ; ou bien il n'en est rien et nous pouvons écrire :

$$\frac{2\pi R_1}{pn_2} = k' + \frac{\alpha}{pn_2} \text{ avec la condition } \alpha < pn_2.$$

Nous devons donc prendre pour k la valeur k' et modifier le pas de l'engrenage de telle sorte que sa nouvelle valeur p' satisfasse à l'équation :

$$k' = \frac{2\pi R_1}{p' n_2}.$$

Comme $p' > p$ nous augmentons ainsi l'épaisseur des dents et nous sommes plus à même encore de vaincre la résistance donnée.

11. Recherche des profils des dents. — Les profils des dents de l'une des roues dans leur mouvement de rotation doivent être tangents aux profils des creux avec lesquels ils viennent en prise ; car si cette condition n'était pas satisfaite les dents tendraient à se pénétrer et à la longue, par suite de l'usure inévitable qui se serait produite, leur profils arriveraient à satisfaire à la loi du contact que nous pouvons leur imposer tout d'abord.

Outre cette condition, nous pouvons aussi nous demander s'il ne serait pas possible de déterminer leur forme de telle façon qu'ils roulent les uns sur les autres, comme le font les circonférences primitives de l'engrenage ; nous diminuerions ainsi la perte de travail absorbé par le frottement des dents en contact, puisqu'à un frottement de glissement nous substituerions un frottement de roulement qui lui est bien inférieur.

Si cette hypothèse était admissible, les points de contact de deux dents, qui à chaque instant ont des vitesses relatives nulles, appartiendraient à l'axe instantané de rotation et leurs surfaces se confondraient avec celles des cylindres de friction eux-mêmes qui sont les lieux de ces axes.

Il en résulte alors que si l'on astreint les dents en prise à se toucher en plusieurs points à la fois il faut abandonner l'idée du frottement de roulement et admettre le frottement de glissement. Si, au contraire, on les astreint à se toucher à chaque instant en un seul point, on peut admettre le frottement de roulement. De là, deux catégories bien nettes d'engrenages connues, la première sous le nom *d'engrenages de force*, la seconde sous celui *d'engrenages de précision*. Nous ferons tout d'abord l'étude de la première, nous réservons de reprendre ensuite celle de la seconde.

Digitized by Google

La détermination des profils se fait alors par deux méthodes générales connues sous les noms de : méthode des *enveloppes* et méthode des *roulettes*.

12. Méthode des enveloppes. — Le profil (D_1) des dents de la roue O_1 étant connu, proposons-nous de rechercher son conjugué ou profil des dents de la roue O_2.

Pour un observateur fixe sur la roue O_2 et n'ayant pas conscience de son mouvement, les deux profils sont constamment en contact et la roue O_1 prend son mouvement relatif par rapport à O_2. Il en résulte que le profil inconnu coïncide avec l'enveloppe du profil donné lorsque la roue O_1 à laquelle il appartient prend son mouvement relatif par rapport à l'autre roue. Si donc nous figurons en O_1, O'_1, ..., différentes positions de la roulante, puis en D_1, D'_1,....., celles correspondantes du profil donné et si nous leur menons des différents centres instantanés de rotation des normales I_1P_1, $I'_1P'_1$,....., leurs pieds P_1, P'_1,....., appartiendront au profil cherché § 151.

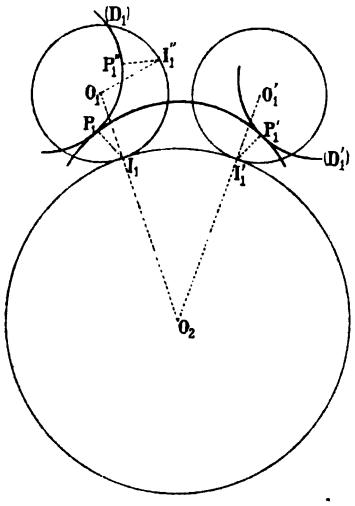


Fig. 10.

Dans le mouvement réel, les points I_1, I'_1,..... sont les points de contact des circonférences primitives. Il s'ensuit que deux profils conjugués en prise satisfont à la condition suivante : *La normale commune en leur point de tangence passe toujours par le point de contact des circonférences primitives.*

La construction précédente est laborieuse, car elle nécessite la reproduction du profil donné pour toutes les positions de la roulante. La remarque suivante permet de l'éviter. Ramenons la roulante de la position O'_1 à la position O_1 ; le profil (D'_1) vient s'appliquer sur (D_1), le point I'_1 prend la position I''_1 telle que : $\widehat{II'_1} = \widehat{II''_1}$ et les droites $O'_1I'_1$, $I'_1P'_1$ viennent en coïncidence avec le rayon $O_1I''_1$ et la normale $I''_1P''_1$ à la dent (D_1). Les angles $\widehat{O_1I''_1P''_1}$ et $\widehat{O'_1I'_1P'_1}$ sont donc égaux et nous pouvons déterminer comme suit un point quelconque du profil cherché : sur la circonférence O_1 à laquelle il appartient, nous prenons un point arbitraire I''_1 et nous déterminons sur la circonférence O_2 le point I'_1 qui lui correspond en portant $\widehat{I_1I'_1} = \widehat{I_1I''_1}$; puis

Digitized by Google

avec le prolongement du rayon $O_2I'_1$ nous faisons un angle $\widehat{O'_1I'_1P'_1}$ égal à l'angle $\widehat{O_1I''_1P''_1}$ et occupant par rapport au rayon $O'_1I'_1$ la même disposition que son égal par rapport au rayon $O_1I''_1$; enfin sur la droite $I'_1P'_1$ obtenue, nous portons une longueur $I'_1P'_1$ égale au segment $I''_1P''_1$. Le point P'_1 ainsi déterminé appartient au profil cherché.

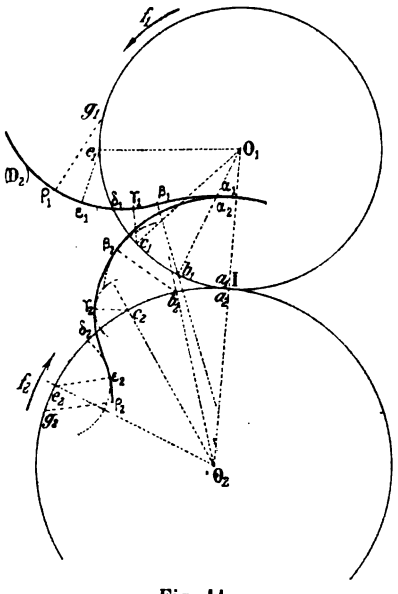


Fig. 11.

Sur la figure 11, cette construction, appliquée un certain nombre de fois, nous a permis de déterminer les points α_2, β_2, γ_2, δ_2, ε_2, ρ_2 du profil (D_2), homologues des points α_1, β_1, γ_1, δ_1, ε_1, ρ_1 du profil (D_1); elle nous permet aussi de conclure que les points δ_1 et δ_2 ou deux profils conjugués qui viennent en prise rencontrent les circonférences primitives sont toujours à la même distance du point de contact I de ces circonférences.

13. Tracé de Poncelet. — La construction précédente est encore laborieuse parce qu'à chaque fois qu'on l'effectue il faut mesurer un angle et le reporter. Nous pouvons toutefois la modifier encore en nous appuyant sur la remarque suivante : la normale en un point quelconque α_2 du profil cherché étant la droite $a_2\alpha_2$, la circonférence décrite du point a_2 comme centre avec $a_2\alpha_2$ lui est tangente, et nous pouvons envisager la courbe $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$..... comme l'enveloppe de circonférences analogues à la précédente. Cette conception nous conduit alors à la construction pratique suivante due à Poncelet :

Sur la circonférence primitive à laquelle appartient le profil donné, nous marquons des points a_1, b_1, c_1, d_1,....., et nous déterminons leurs homologues a_2, b_2, c_2, d_2,..... sur l'autre circonférence. Nous plaçons ensuite sur l'un quelconque a_1 des premiers, la pointe d'un compas dont nous modifions l'ouverture de façon que l'autre pointe décrive une circonférence tangente au profil connu; puis, de son homologue a_2 comme centre, avec l'ouverture obtenue pour rayon, nous décrivons un arc de circonférence. En répétant cette construction un

Digitized by Google

certain nombre de fois et prenant l'enveloppe des différents arcs tracés, nous obtenons le profil cherché.

Théoriquement le profil donné pourrait être quelconque ; pratiquement il doit être défini géométriquement de façon qu'on puisse lui mener des normales et doit conduire à un profil conjugué qui ne présente pas de points singuliers, auquel cas l'exécution de la dent correspondante serait impossible. Il doit aussi se rapprocher le plus possible de la forme parabolique qui correspond au profil d'égale résistance et donner des dents dont les épaisseurs vont en augmentant de la tête à la racine. Sur la figure 12, le profil de gauche qui correspond à ce cas est dit rationnel ; celui au contraire de droite est à rejeter. Il correspond à une dent dite *étranglée*.

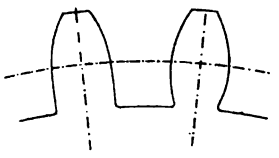


Fig. 12.

14. Tracé de Reuleaux. — La construction de Reuleaux nous conduit, comme celle de Poncelet, au tracé du profil conjugué d'un profil donné $\alpha_1\beta_1\gamma_1$,..... ; elle permet en outre d'obtenir la *ligne d'action* des dents, c'est-à-dire le lieu de leurs points de contact.

Elle repose sur la remarque suivante : les normales $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$ aux profils conjugués en deux points homologues α_1 et α_2 coupent les circonférences primitives correspondantes en des points a_1 et a_2 satisfaisant à la relation :

$$\widehat{Ia_1} = \widehat{Ia_2}.$$

Elles sont de plus en coïncidence lorsque les points α_1 et α_2 le sont eux-mêmes en un certain point α commun à deux arcs de circonférence ayant pour centres respectifs les points O_1 et I, et pour rayons les segments $o_1\alpha_1$ et $a_1\alpha_1$.

Le point cherché α_2 appartenant à la roue O_2 et coïncidant à un moment donné avec le point α se trouve donc à l'intersection de deux arcs de circonférences de centres respectifs O_2 et a_2 et de rayons $o_2\alpha$ et $a_1\alpha_1$.

La construction du profil cherché peut donc se résumer comme suit: après avoir marqué sur les circonférences primitives, les deux groupes de points homologues $a_1 . b_1 . c_1$,....., $a_2 . b_2 . c_2$...., on mène des premiers les normales $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$,....., au profil donné et on décrit du point O_1 comme centre des arcs de circonférence passant par les points α_1, β_1, γ_1..... On prend ensuite leurs points de rencontre α, β, γ,..... avec ceux qui ont pour centre commun le point I et pour rayons les longueurs des normales précédentes et l'on obtient ainsi la ligne d'action $\alpha\beta\gamma$..... des dents. Puis par les points α, β, γ,..... ainsi déterminés on fait passer des

Digitized by Google

arcs de circonférence de centre O_2 et on détermine leurs points de rencontre $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots\ldots$ avec ceux qui ont pour centres respectifs les points

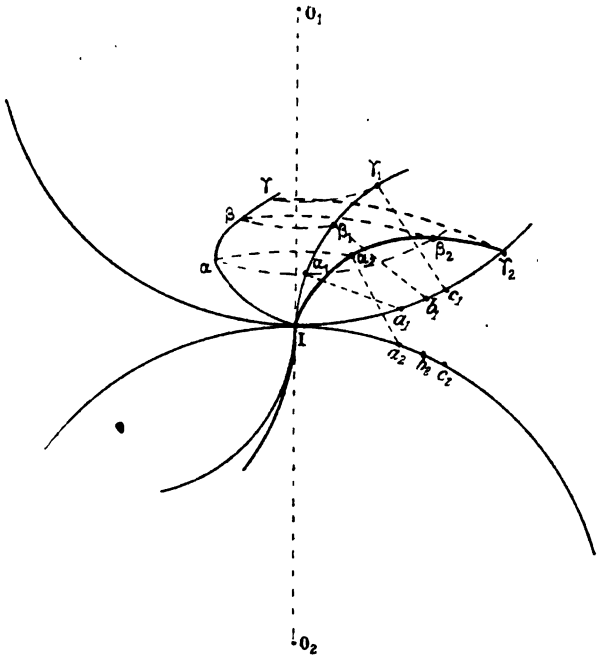


Fig. 13.

a_2, b_2, c_2 et pour rayons les longueurs $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$. La courbe lieu des points $\alpha_2, \beta_2\gamma_2, \ldots\ldots$ n'est autre que le profil des dents de la roue O_2.

15. Méthode des roulettes. — Soient O_1 et O_2 les deux circonférences primitives de l'engrenage, (C) une courbe quelconque qui leur est tangente au point I et à laquelle nous supposons invariablement lié un point M. Lorsque la courbe (C) roule sur les circonférences O_1, O_2 le point M engendre deux courbes (D_1), (D_2), qui peuvent servir de profils aux dents des roues correspondantes.

Pour l'établir, il nous suffit de prouver que la courbe (D_1), profil des dents de la roue O_1, a pour enveloppe la courbe (D_2), profil des dents de la roue O_2, lorsque la circonférence O_1 roule sur la circonférence O_2.

Tout d'abord à l'instant où la roulette (C) va rouler, soit sur la circonférence O_1, soit sur la circonférence O_2, le point I est le centre instantané de rotation et d'après le théorème de Chasles, § 142, la droite IM est la normale commune en M aux deux courbes (D_1) et (D_2); elles sont donc tangentes en ce point.

Digitized by Google

Ceci posé, le roulement relatif à un arc $\widehat{II_2}$ de la courbe (C) sur la circonférence O_2 peut s'obtenir de deux manières : ou directement et alors le point M se transporte de M en M_2 pied de la normale menée du point I_2 au profil (D_2), ou par la combinaison de deux mouvements simultanés : l'un de roulement relatif à l'arc $\widehat{II_1} = \widehat{II_2}$ de la courbe (C) sur la circonférence O_1 et qui déplace le point M jusqu'au point M_1 pied de la normale abaissée du point I_1 sur le profil (D_1) ; l'autre de roulement relatif à l'arc $\widehat{II_2}$ de la circonférence O_2 sur la circonférence O_1 et qui amène respectivement les points I_1, M_1 en I_2, M_2. Le point M_1 du profil (D_1), dans le mouvement de roulement de la circonférence O_1 sur la circonférence O_2, est donc venu en coïncidence avec le point M_2 et comme la normale I_1M_1 s'est aussi appliquée sur I_2M_2, le profil (D_1) a bien pour enveloppe le profil (D_2).

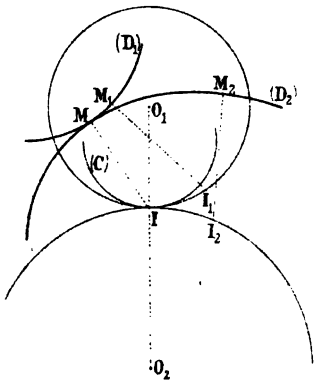


Fig. 14.

16. Arcs d'approche, de retraite, de conduite. — Soient (fig. 14) O_1 la roue menante, f_1 son sens de rotation, O_2 la roue menée qui tourne alors dans le sens de la flèche f_2, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ ....., $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ ..... deux profils conjugués dessinés au moment où ils entrent en prise. La construction de Poncelet montre que l'arc $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ du premier exerce son action sur l'arc $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ du second avant la ligne des centres par rapport au sens du mouvement et qu'ils s'approchent tous deux de la ligne des centres jusqu'au moment où les points δ_1 et δ_2 viennent en coïncidence. Pour cette raison nous donnons aux arcs égaux $\widehat{I\delta_1}$, $\widehat{I\delta_2}$ les noms *d'arcs d'approche.*

Au contraire, l'arc $\delta_1\varepsilon_1\rho_1$ du profil (D_1) conduit l'arc $\delta_2\varepsilon_2\rho_2$ du profil (D_2) après la ligne des centres et si nous supposons que le contact cesse au moment précis où les points ρ_1 et ρ_2 viennent en coïncidence ou, ce qui revient au même, au moment où les points g_1 et g_2 arrivent sur la ligne des centres, nous pouvons donner comme précédemment les noms *d'arcs de retraite* aux arcs égaux $\widehat{\delta_1 g_1}$, $\widehat{\delta_2 g_2}$. Pendant cette partie de la conduite, les deux profils conjugués s'éloignent en effet de la ligne des centres.

Les sommes égales $\widehat{I\delta_1} + \widehat{\delta_1 g_1}$, $\widehat{I\delta_2} + \widehat{\delta_2 g_2}$ qui correspondent sur chacune des circonférences primitives à un arc d'approche et à un arc de retraite et qui sont relatives à la durée du contact se nomment *arcs de conduite.*

Digitized by Google

17. Flancs et faces des dents. — La forme $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$..... adoptée pour le profil des dents de la roue O_1 étant rationnelle, nous pouvons poser les définitions suivantes :

Le *flanc* de la dent $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$..... de la roue menante coïncide avec la partie $\alpha_1\beta_1\delta_1$ du profil (D_1) qui, pendant l'approche, exerce son action sur le profil conjugué; sa *face* correspond à l'arc $\delta_1\varepsilon_1\rho_1$ et exerce en retraite son action sur ce même profil.

Le *flanc* de la dent $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$... de la roue menée coïncide avec la partie $\delta_2\varepsilon_2\rho_2$ du profil (D_2) qui est conduite pendant la retraite par la face de la dent conjuguée; sa face correspond à l'arc $\alpha_2\beta_2\delta_2$ qui est conduit en approche par le flanc de la dent conjuguée.

De ces définitions, il résulte qu'à chaque instant deux dents en prise sont en contact, par un flanc et une face.

18. Détermination de l'arc de conduite. — Dans un engrenage, au moment précis où un couple de dents cesse d'être en prise, il est nécessaire que le couple suivant vienne en contact pour que la transmission de mouvement s'effectue sans interruption ; l'arc de conduite doit donc au moins être égal à un pas. Si nous lui donnions cette valeur il n'y aurait à chaque instant qu'un seul couple de dents en contact et la continuité du mouvement transmis serait subordonné à la rupture d'une dent. Pour éviter cet inconvénient, nous nous imposerons la condition qu'il y ait à chaque instant au moins deux couples de dents en prise et nous ferons l'arc de conduite au moins égal à deux pas. L'effort transmis se répartit alors sur chaque couple ; les dents s'usent moins vite et si l'une d'elles se casse il n'y aura pas de raison pour que le même inconvénient se produise sur l'autre couple.

Comme l'engrenage doit être réciproque, on partage en général l'arc de conduite en deux parties égales : l'une est relative à l'arc d'approche, l'autre à l'arc de retraite. S'il est impossible d'effectuer une telle division, on fait, pour des raisons que nous exposerons dans la suite, l'arc d'approche inférieur à l'arc de retraite. Si leur somme vaut $2p$, il y a à chaque instant deux paires de dents en prise ; si, au contraire, elle est supérieure à $2p$ et inférieure à $3p$, et si nous la désignons par α, il y a trois paires de dents en contact pendant une conduite égale à $\alpha - 2p$ et deux seulement pendant une conduite égale à $3p - \alpha$.

Si donc nous augmentons l'arc de conduite, nous obtenons un plus grand nombre de dents en contact, mais, comme nous allons l'établir, nous affaiblissons leurs têtes et nous les rendons plus sujettes à la rupture. Aussi, en pratique, pour concilier à la fois ces avantages et ces inconvénients, on astreint l'arc de conduite à ne varier qu'entre certaines limites.

Digitized by Google

Les dents d'engrenages sont donc des couples cinématiques qui assurent le guidage des cylindres de friction. Nous conviendrons de les regarder dans la suite comme ne formant qu'un seul couple, discontinu toutefois et à contact surabondant d'après ce qui précède.

19. Circonférences d'échanfrinement et d'évidement des

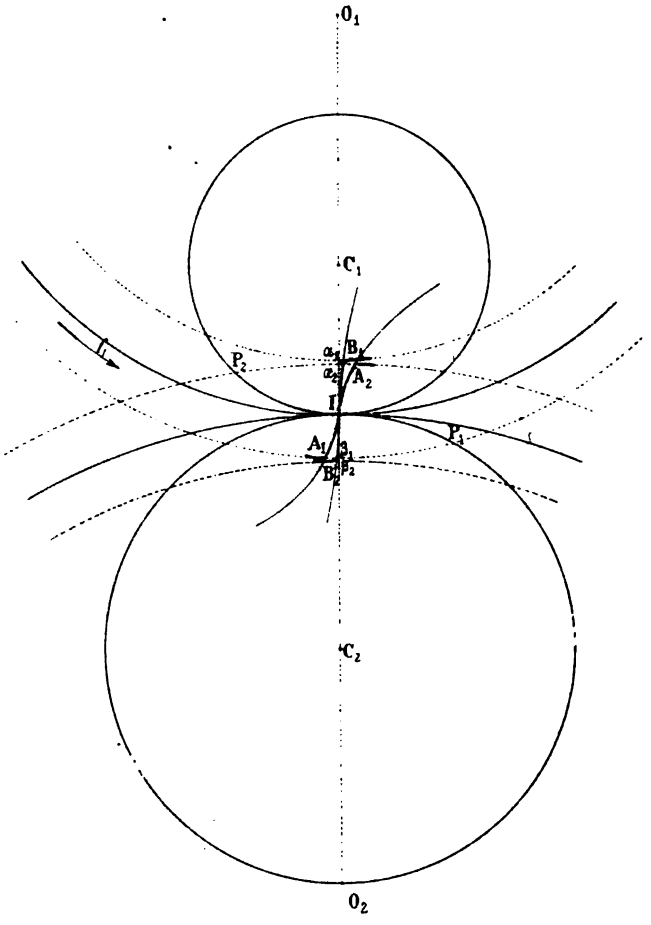


Fig. 15.

dents. — Soient O_1 la roue menante dans le sens de la flèche f_1, O_2 la roue menée, P_1 et P_2 les points extrêmes de la ligne d'action.

Au point P_2, le flanc des dents de la roue O_1 entre en contact avec la face des dents de la roue O_2; il est donc inutile de prolonger cette dernière au delà d'une circonférence de centre O_2 et de rayon O_2P_2 à

Digitized by Google

laquelle on donne le nom de *circonférence d'échanfrinement* des dents de la roue menée.

En supposant qu'elle vienne couper la ligne des centres au point α_2, pour limiter le fond des dents de la roue O_1, il suffirait théoriquement de décrire la circonférence de centre O_1 et de rayon $O_1\alpha_2$. Pratiquement, afin d'éviter que la tête des dents d'une roue ne vienne buter contre le fond des creux de l'autre, on ménage un certain jeu que l'on porte de α_2 en α_1 sur la ligne des centres, là où le rapprochement est maximum, et on décrit la circonférence ayant pour centre O_1 et pour rayon $O_1\alpha_1$; elle porte le nom de *circonférence d'évidement* des dents de la roue menante.

Au point P_1, la face d'une dent de la roue menante cesse d'être en contact avec le flanc d'une dent de la roue menée ; il est donc inutile de la prolonger au delà de ce point. C'est pourquoi on l'échanfrine à la circonférence de centre O_1 et de rayon O_1P_1. Par analogie avec ce qui précède, si elle coupe en β_1 la ligne des centres et que l'on porte le jeu de β_1 en β_2, la circonférence de centre O_2 et de rayon $O_2\beta_2$ évide la roue menée.

De cette théorie il résulte que la connaissance seule du premier et du dernier point de la ligne d'engrènement conduit à l'échanfrinement des dents des deux roues.

20. Phénomène d'arc-boutement des engrenages. — Le frottement des dents qui absorbe, comme nous l'avons dit au début, une certaine partie du travail moteur, présente dans certains cas un inconvénient plus grave connu sous le nom *d'arc-boutement.*

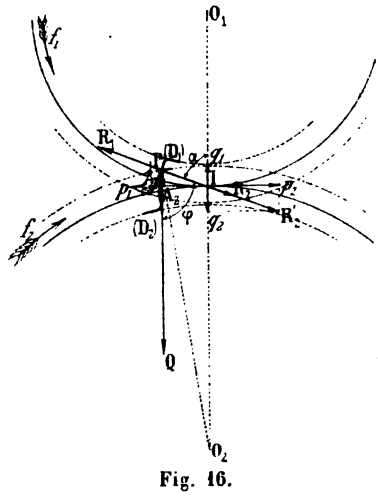


Fig. 16.

Soient O_1 la roue menante dans le sens de la flèche f_1, O_2 la roue menée qui tourne alors dans le sens de la flèche f_2, D_1 et D_2 deux dents en contact au point P. S'il n'y avait pas frottement, l'action de la dent D_1 sur la dent D_2 se traduirait par une force qui leur serait normale et qui serait portée par suite par la droite PI. Mais en vertu du frottement, comme on l'établira dans le cours de première division, la poussée s'incline sur cette normale, en arrière du mouvement relatif, d'un angle

Digitized by Google

φ dépendant de la nature des surfaces frottantes et prend par exemple la position PQ. Si l'angle $\widehat{IPQ}$ est supérieur à l'angle $\widehat{IPO_2}$, elle tend à faire tourner la roue O_2 en sens inverse du mouvement et celui-ci devient alors impossible. Dans ces conditions l'engrenage est arc-bouté et si l'on cherche à augmenter la puissance, on produit plutôt sa rupture que sa mise en marche. Il y a donc lieu de rechercher les précautions qu'il convient de prendre pour éviter ce phénomène. Remarquons à cet effet que l'angle φ dépendant uniquement de la nature des surfaces frottantes, plus on augmente l'angle $\widehat{IPO_2}$ moins on a à craindre l'arrêt de la transmission.

Si donc nous désignons par α l'angle $\widehat{O_1IP}$, et si nous considérons le triangle IPO_2, nous pouvons écrire :

$$\frac{\sin \widehat{IPO_2}}{R_2} = \frac{\sin (\alpha - IPO_2)}{IP}$$

ou :

$$\frac{\sin \widehat{IPO_2}}{R_2} = \frac{\sin \alpha \cos \widehat{IPO_2} - \sin \widehat{IPO_2} \cos \alpha}{IP}.$$

Résolue par rapport à l'angle $\widehat{IPO_2}$, cette équation nous donne :

$$\operatorname{cotg} \widehat{IPO_2} = \frac{IP}{R_2 \sin \alpha} + \operatorname{cotg} \alpha.$$

Elle montre que l'angle $\widehat{IPO_2}$ est d'autant plus grand que l'angle α l'est lui-même. C'est pourquoi, en pratique, on ne le fait pas inférieur à 75° tout en rapprochant le plus possible le contact des dents de la ligne des centres.

En retraite, l'inconvénient de l'arc-boutement est moins à craindre car l'angle $\widehat{IPO_2}$ est toujours plus grand qu'en approche.

Il résulte de cette théorie que si dans un engrenage l'arc d'approche ne peut être égal à l'arc de retraite, il y a lieu de donner au second une valeur plus grande qu'au premier.

21. Coinçage. — Quand les arbres d'un engrenage ne sont pas rigoureusement parallèles ou bien encore que l'une des roues n'est pas perpendiculaire à son axe, les dents se touchent parfois des deux côtés à la fois et pénètrent les creux conjugués à la façon d'un coin ; d'où le nom de *coinçage* donné au phénomène.

22. Calcul de l'arc élémentaire et de l'arc total de glissement relatif de deux dents en contact. — Soient (fig. 16) O_1 la roue menante dans le sens de la flèche f_1, ω_1 sa vitesse angulaire, ω_2 celle de

Digitized by Google

la roue menée au moment où deux dents conjuguées viennent en contact au point P, s la valeur commune des arcs $\widehat{IA_1}$ et $\widehat{IA_2}$, l la longueur du segment IP de normale commune aux dents en prise limité au point P et au point de contact I des circonférences primitives.

A l'instant considéré, le mouvement relatif de la roue O_1 par rapport à la roue O_2 résulte d'une rotation de vitesse angulaire $\omega_1 + \omega_2$ autour de l'axe projeté en I sur le plan de la figure, § 183, et communique au point P de la dent D_1 un déplacement auquel on donne le nom de *glissement élémentaire relatif* des deux dents en contact. Il a pour expression :

$$l(\omega_1 + \omega_2)dt.$$

Mais comme, pendant le temps dt, les points A_1 et A_2 se rapprochent de la ligne des centres d'un arc ds satisfaisant aux relations :

$$ds = \omega_1 R_1 dt, \qquad ds = \omega_2 R_2 dt ;$$

nous en déduisons :

$$\omega_1 dt = \frac{ds}{R_1}, \qquad \omega_2 dt = \frac{ds}{R_2};$$

et l'arc élémentaire de glissement relatif a finalement pour expression :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) l ds.$$

Comme il est proportionnel à la longueur l, il y a lieu de la réduire à son minimum pour diminuer le plus possible le travail moteur absorbé.

Le minimum de glissement des dents se produit donc lorsqu'elles entrent en contact sur la ligne des centres ; son maximum se produit au contraire lorsqu'elles viennent en prise ou sont sur le point de se séparer.

La somme des arcs précédents évaluée pendant l'approche et pendant la retraite conduit à l'expression de *l'arc total de glissement relatif* des deux dents considérées ; elle est, en désignant par a l'arc d'approche et par r l'arc de retraite :

$$G = \int_o^{s_a} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) l ds + \int_o^{s_r} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) l ds$$

ou :

$$G = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \left[\int_o^{s_a} l ds + \int_o^{s_r} l ds\right].$$

Pour pouvoir évaluer ces deux intégrales, il faudrait connaître l en fonction de s et cela nous est impossible puisque nous n'avons pas défini géométriquement les profils. Toutefois, comme en pratique, les points

Digitized by Google

extrêmes de la ligne d'engrènement ne sont pas très éloignés de la ligne des centres, nous pouvons approximativement substituer s à l. Nous obtenons alors :

$$G = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left[\int_o^a sds + \int_o^r sds\right]$$

ou :

$$G = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \frac{a^2 + r^2}{2}.$$

En fonction des nombres de dents Z_1 et Z_2 des deux roues et dans l'hypothèse où $a = r = p$, l'expression précédente devient :

$$G = 2\pi p \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right).$$

23. Engrenage a profils épicycloïdaux.

α) **Rappel du tracé des épicycloïdes et hypocycloïdes.** — 1° *Epicycloïde et hypocycloïde ordinaires.* — L'*épicycloïde ordinaire* ABCD..... (fig. 17) est engendrée par le point I de la roulette O_2 qui

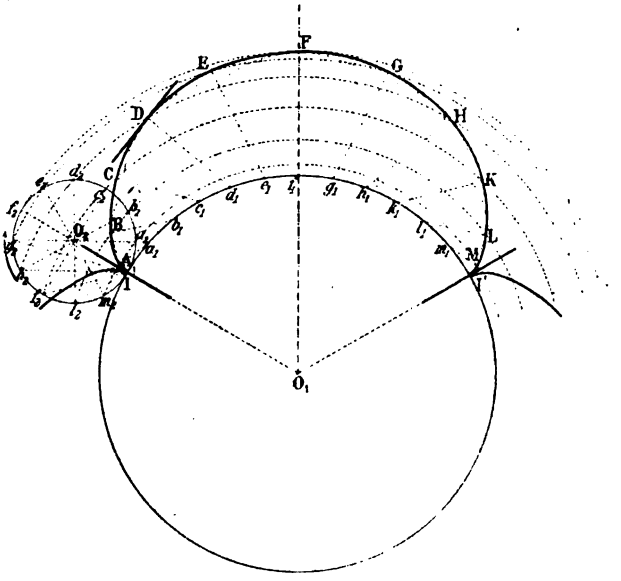


Fig. 17.

roule sans glisser sur la circonférence O_1. Ses points A, B, C, D, ... se déterminent de la façon suivante. De I en I' sur la base nous portons le

Digitized by Google

développement de la roulante et nous divisons l'arc II′ obtenu ainsi que la circonférence de la roulante en douze parties égales, par exemple ; nous obtenons ainsi deux groupes de points de division $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots\ldots$, $a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots\ldots$ Par ceux du second groupe, nous faisons passer des circonférences de centre commun O_1 ; puis, des points $a_1, b_1, c_1, \ldots\ldots$, comme centres avec des rayons respectivement égaux aux cordes Ia_2, Ib_2, Ic_2, ...,

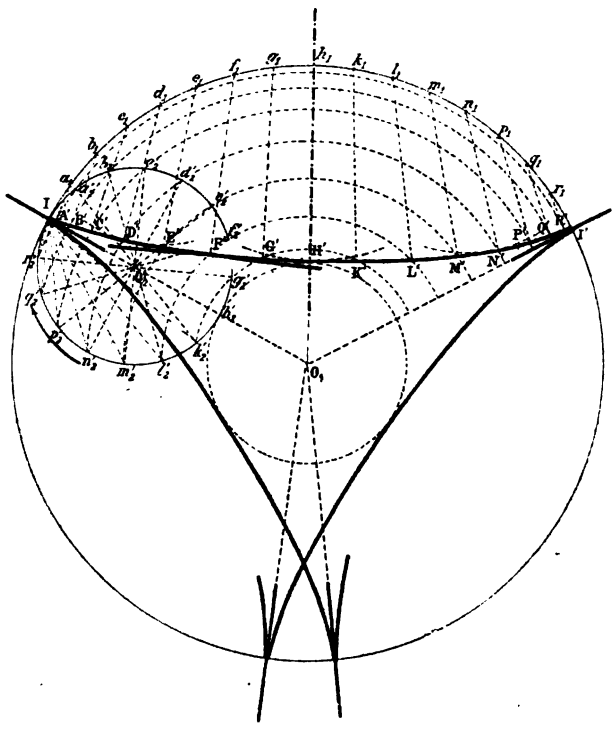


Fig. 18.

nous décrivons des arcs de circonférences. Ils sont tangents à l'épicycloïde à tracer aux points A, B, C, ... où ils viennent couper les précédents.

Si au groupe de points $a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots\ldots$, nous substituons (fig. 18) le groupe $a'_2, b'_2, c'_2, d'_2, \ldots\ldots$, de la roulette O'_2 et si nous répétons les mêmes constructions, nous déterminons des points A′, B′, C′, D′, ... qui appartiennent à une *hypocycloïde ordinaire*.

2° *Epicycloïde et hypocycloïde allongées.* — L'*épicycloïde allongée* ABCD..... (fig. 19) est la courbe engendrée par leur point I_1 extérieur et invariablement lié à la roulante O_2 lorsqu'elle roule sans glisser sur la circonférence O_1. Si nous échangeons (fig. 20) les points I_1 et I'_2,

Digitized by Google

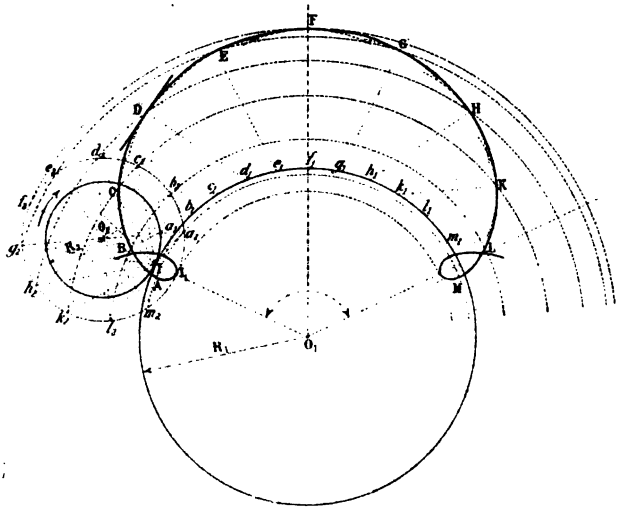


Fig. 19.

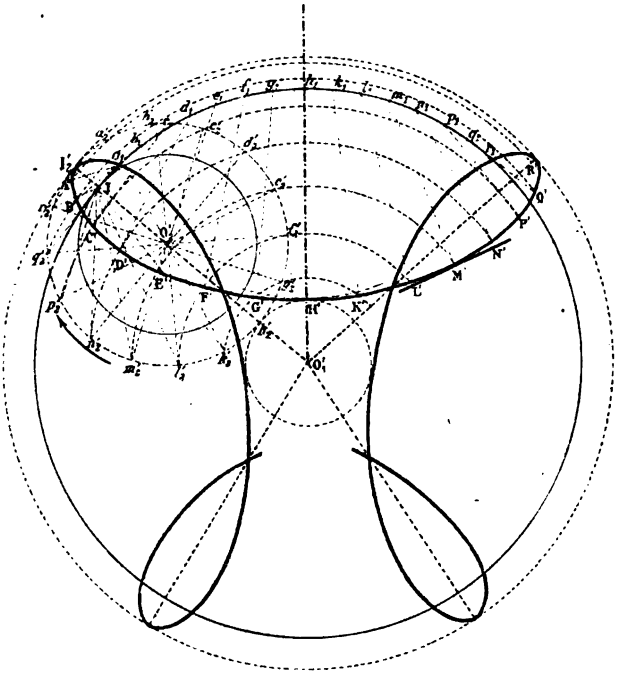


Fig. 20.

Digitized by Google

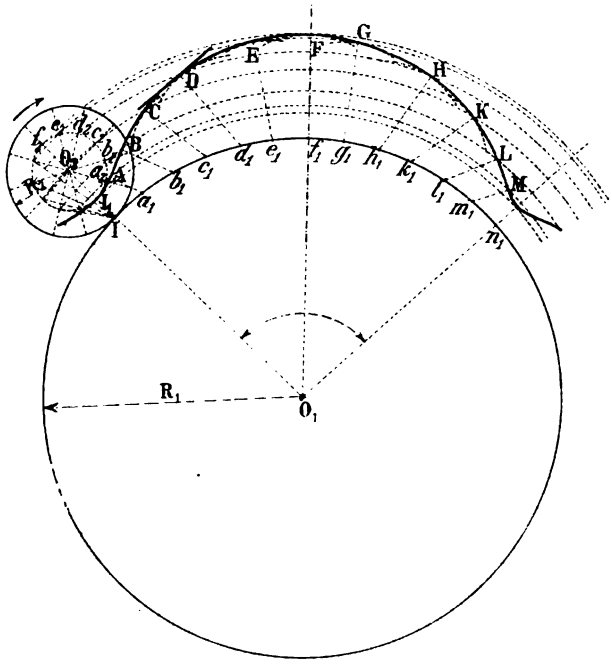


Fig. 21.

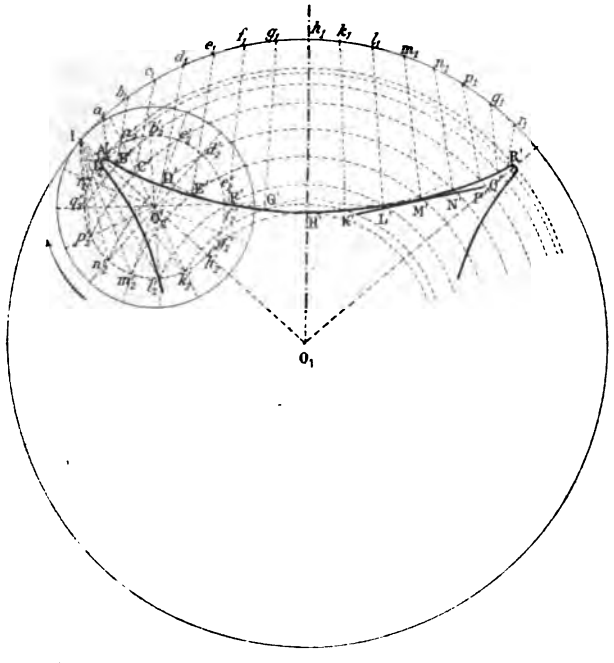


Fig. 22.

Digitized by Google

les roulantes O_2 et O'_2, la courbe décrite par le point I'_2 devient une *hypocycloïde allongée* A' B' C' D'.....

Si au groupe de points situés sur la roulante dans les constructions précédentes, nous substituons ceux appartenant aux circonférences O_2I_1, $O'_2I'_2$ et si nous répétons les constructions précédentes, nous déterminons d'une part les points A, B, C, D, ..., de l'épicycloïde allongée, d'autre part les points A', B', C', D', ..., de l'hypocycloïde allongée.

3° *Epicycloïde et hypocycloïde raccourcies.* — L'*épicycloïde raccourcie* ABCD..... (fig. 21) est la courbe engendrée par un point I_1 intérieur et invariablement lié à la roulante O_2 qui roule sans glisser sur la circonférence O_1. Si nous échangeons les points I_1 et I'_2 les roulantes O_2 et O'_2, la courbe décrite par le point I'_2 devient une *hypocycloïde raccourcie* A' B' C' D'..... (fig. 22).

En conservant les notations précédentes, nous déterminons par des constructions identiques à celles indiquées, les points A, B, C, D, ... de la première et ceux A', B', C', D', ... de la seconde.

β) **Recherche des profils des dents.** — Soient (fig. 23) O_1 et O_2 les deux circonférences primitives de l'engrenage, C_1 et C_2 deux autres circonférences qui leur sont tangentes au point I; elles ont des diamètres *inférieurs* aux rayons correspondants des précédentes et portent les noms de roulettes.

Faisons rouler à droite de la ligne des centres, la roulette C_1 sur les circonférences O_1 et O_2 et effectuons le tracé des deux arcs de courbe, l'un IB_1 d'*hypocycloïde*, l'autre IA_2 d'*épicycloïde*, engendrés par le point I. Faisons de même rouler, à gauche de la ligne des centres, la roulette C_2 sur les deux mêmes circonférences et effectuons le tracé des deux arcs de courbe, l'un IA_1 d'*épicycloïde*, l'autre IB_2 d'*hypocycloïde*, engendrés par le même point I.

D'après les principes généraux exposés § 15, les courbes A_1IB_1. A_2IB_2 peuvent être adoptées pour profils conjugués des dents des roues O_1 et O_2 et comme elles se composent chacune d'un arc d'épicycloïde et d'un arc d'hypocycloïde, nous donnons à l'engrenage le nom d'*engrenage à profils épicycloïdaux*.

γ) **Lieu des contacts.** — La roue O_2 étant supposée menante doit tourner dans le sens de la flèche f_2 pour que sa dent A_2IB_2 puisse pousser la dent conjuguée A_1IB_1. Pour fixer les idées, supposons qu'elle ait tourné de l'angle IO_2I_2; la roue O_1 aura tourné elle aussi d'un angle IO_1I_1 tel que: $\widehat{II_1} = \widehat{II_2}$ et le contact des dents aura lieu en retraite. La face IA_2 des dents de la roue menante appuiera donc sur le flanc IB_1 des dents de la roue menée.

Digitized by Google

Après la rotation considérée, la face IA_2 vient couper la roulette C_1 au point P_2 tel que :

$$\widehat{IP_2} = \widehat{I\Pi_2}.$$

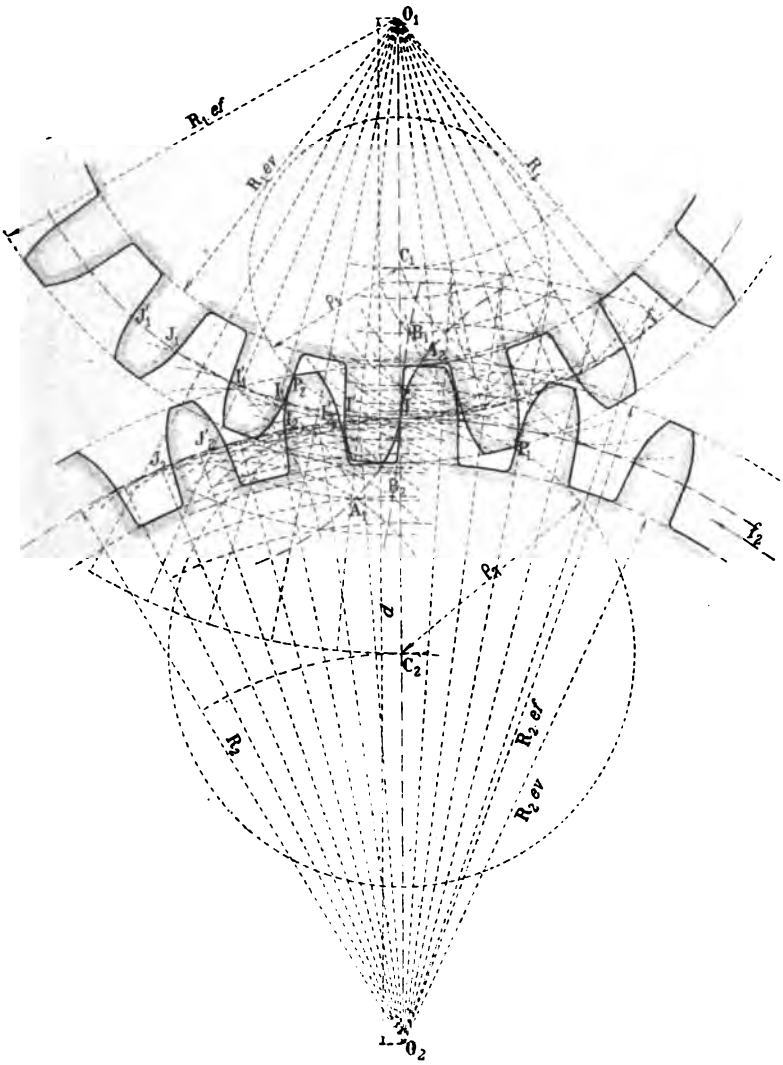


Fig. 23.

Le flanc IB_1 la coupe en un point P'_2 tel que :

$$\widehat{IP'_2} = \widehat{I\Pi_1}.$$

Digitized by Google

Or :

$$\widehat{II_1} = \widehat{II_2}.$$

Par suite :

$$\widehat{IP'_2} = \widehat{IP_2}$$

et les deux points P_2 et P'_2 coïncident. Les arcs I_2P_2, I_1P_2 d'épicycloïde et d'hypocycloïde peuvent donc être regardés comme engendrés par le même point P_2 de la roulette C_1 roulant successivement sur les circonférences O_2 et O_1. Dans ces deux mouvements, comme le point I est le centre instantané de rotation correspondant à la position P_2 du point décrivant, d'après le théorème de Chasles § 142, la droite IP_2 est la normale commune en P_2 aux deux profils. Ils sont donc bien conjugués, ce que nous savions déjà, et le lieu de leur contact en retraite est un certain arc $\widehat{IP_2}$ de roulette C_1. De plus à un instant quelconque, le contact des dents se fait par exemple en un certain point P_2 satisfaisant à la relation :

$$\widehat{II_1} = \widehat{II_2} = \widehat{IP_2}.$$

Par un raisonnement identique, nous établirions qu'en approche le lieu du contact des dents coïncide avec l'arc $\widehat{IP_1}$ de la roulette C_1.

δ) **Circonférences d'échanfrinement et d'évidement des dents.** — Désignons par *a* et *r* les arcs d'approche et de retraite. En portant sur les roulettes C_2 et C_1, les arcs $\widehat{IP_1}$ et $\widehat{IP_2}$ respectivement égaux à *a* et *r*, nous obtenons en P_1 et P_2, comme le prouve le raisonnement précédent, les premier et dernier points de la ligne d'action. Les circonférences d'échanfrinement des dents sont donc O_1P_1, O_2P_2 ; quant aux circonférences d'évidement des roues elles s'en déduisent comme nous l'avons indiqué § 19.

ε) **Tracé des dents. Gabari.** — Après avoir effectué le tracé de deux profils conjugués, il est nécessaire sur l'épure de dessiner complètement quelques dents. A cet effet, nous portons à partir du point I sur chacune des circonférences primitives, de part et d'autre de la ligne des centres, un certain nombre de fois le pas de l'engrenage ; puis à partir des points de division obtenus, nous portons l'épaisseur d'une dent, dans le sens de la rotation sur la roue O_1, en sens inverse sur la roue O_2 et nous déterminons ainsi les points I', I'_1, J'_1, I'_2, J'_2. Ceci fait, nous relevons le gabari A_2IB_2 avec un arc de chacune des circonférences d'échanfrinement et d'évidement des dents en prenant la précaution de marquer le point I où il coupe la circonférence primitive de la roue O_2 et nous le transportons successivement en I_2 et J_2 ; puis nous le retournerons ensuite et nous recommençons la même opération aux points I'_2 et J'_2.

Digitized by Google

Nous opérons ensuite de la même façon sur la roue O_1 avec le gabari A_1IB_1.

ζ) **Calcul de l'arc de glissement relatif de deux dents.** — Nous avons établi § 22 que l'arc élémentaire de glissement relatif de deux dents d'engrenage avait pour expression :

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) l\,ds,$$

l et s étant (fig. 23) les longueurs de la corde IP_2 et de l'arc correspondant de roulette C_1 relatives à un point quelconque P_2 de contact. Comme nous l'avons dit, l est une fonction de s facile à trouver dans le cas qui nous occupe. En effet, l'angle au centre $\widehat{IC_1P_2}$, correspondant à un nombre n de degrés, intercepte sur la roulette C_1 de rayon ρ_1 un arc s ; par suite :

$$s=\frac{\pi\rho_1 n}{180}$$

ou :

$$n=\frac{180s}{\pi\rho_1}.$$

D'autre part, le triangle isocèle IC_1P_2 donne la relation :

$$\frac{l}{2}=\rho_1\sin\frac{n}{2}$$

ou :

$$l=2\rho_1\sin\frac{n}{2}.$$

L'expression de l'arc élémentaire de glissement relatif peut donc s'écrire :

$$dg=2\rho_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\sin\frac{90s}{\pi\rho_1}$$

et celle de l'arc total :

$$G=\int_o^a 2\rho_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\sin\frac{90s}{\pi\rho_2}\,ds+\int_o^r 2\rho_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\sin\frac{90s}{\pi\rho_1}\,ds$$

ou :

$$G=2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left[\rho_2\int_o^a\sin\frac{90s}{\pi\rho_2}\,ds+\rho_1\int_o^r\sin\frac{90s}{\pi\rho_1}\,ds\right].$$

Or :

$$\int_o^a\sin\frac{90s}{\pi\rho_2}\,ds=\frac{\pi\rho_2^2}{45}\sin^2\frac{45a}{\pi\rho_2}$$

$$\int_o^r\sin\frac{90s}{\pi\rho_1}\,ds=\frac{\pi\rho_1^2}{45}\sin^2\frac{45r}{\pi\rho_1}.$$

Digitized by Google

Par suite :

$$G = \frac{2\pi}{45}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left[\rho_2^2 \sin^2 \frac{45a}{\pi\rho_2} + \rho_1^2 \sin^2 \frac{45r}{\pi\rho_1}\right].$$

Cas particulier. — Plaçons-nous dans le cas particulier où $\rho_1 = \rho_2$. où $a = r = p$ et supposons que la valeur de l'angle $\widehat{O_1IP_2}$ soit de 75° : alors :

$$\pi\rho_1 = 6p$$

et nous pouvons écrire :

$$G = \frac{144}{45\pi} \sin^2 \frac{45}{6} \times p^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

ou, en remplaçant le sinus par l'arc :

$$G = \frac{180}{\pi} p^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

7) **Tracé d'une série.** — De manière à diminuer le nombre de leurs modèles, les constructeurs d'engrenages prennent pour profils des dents, des courbes telles que dans une série de roues une quelconque d'entre elles peut engrener avec toutes les autres. Pour que cette condition soit satisfaite et que le rapport des vitesses angulaires des arbres de rotation demeure constant, il est nécessaire qu'il y ait égalité entre les rayons des roulettes qui permettent d'engendrer les profils des dents et que leur rayon commun soit inférieur à la moitié du diamètre du plus petit pignon de la série pour éviter l'étranglement des dents.

Considérons en effet (fig. 24) une roue O et deux pignons O_1 et O_2 auxquels nous faisons correspondre trois roulettes de rayons ρ, ρ_1, ρ_2. Envisagées deux à deux, ces roues donnent naissance aux trois couples suivants d'engrenages : $(O.O_1)$, $(O.O_2)$, $(O_1.O_2)$.

La courbure de la face des dents de la roue O dans l'engrenage $(O.O_1)$ dépend du rayon ρ_1 ; dans l'engrenage $(O.O_2)$ elle dépend du rayon ρ_2. Pour qu'elle soit la même, il faut donc que $\rho_1 = \rho_2$. D'autre part, dans l'engrenage $(O.O_1)$ la courbure de la face des dents du pignon O_1 dépend du rayon ρ ; dans l'engrenage $(O_1.O_2)$, elle dépend du rayon ρ_2. Pour qu'elle soit la même, il faut donc que $\rho = \rho_2$, ce qui exige que les rayons des trois roulettes soient égaux. Cette condition nécessaire pour l'engrènement des roues de la série n'est pas suffisante. Il faut encore, en laissant le jeu de côté, que les circonférences d'échanfrinement et d'évidement de deux pignons quelconques deviennent tangentes quand nous mettons en contact leurs circonférences primitives. Leurs rayons $R_1 + \alpha$, $R_2 - \beta$, α et β désignant les hauteurs de pied et de tête des dents

Digitized by Google

de la roue, et la distance $R_1 + R_2$ de leurs centres doivent donc vérifier la relation :

$$R_1 + \alpha + R_2 - \beta = R_1 + R_2$$

de laquelle nous déduisons :

$$\alpha = \beta.$$

Autrement dit: Toutes les roues de la série doivent avoir même hau-

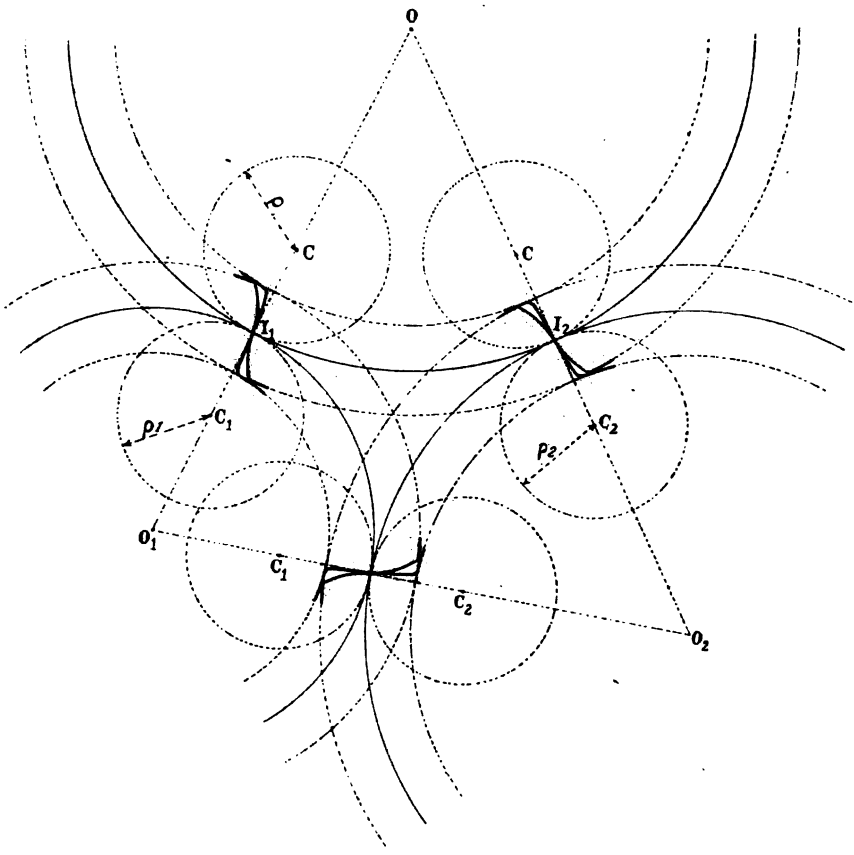


Fig. 24.

teur de tête et même hauteur de pied. En tenant compte du jeu, Reuleaux adoptait pour la première $0{,}3p$, pour la seconde $0{,}4p$.

θ) **Nombre minimum de dents du plus petit pignon de la série.** — Le calcul du nombre minimum de dents du plus petit pignon de la série sera établi § 33.

Digitized by Google

1) **Effort normal des dents en contact.** — Le calcul de l'effort normal des dents en contact repose sur les deux principes suivants :

Principe de l'action et de la réaction. — Lorsqu'un corps A agit sur un corps B, cette action se traduit, en laissant de côté le frottement, par une force normale aux deux corps en leur point de contact et dirigée dans le sens où A presse sur B ; le corps B réagit à son tour sur A et cette réaction se traduit par une force égale et contraire à la précédente.

Deuxième principe. — Le point d'application P d'une force agissant sur un système invariable peut être transporté en un point quelconque de sa direction invariablement lié au système sans que son effet sur le corps soit changé.

Ces principes posés, considérons (fig. 16) deux dents de l'engrenage précédemment étudié au moment où elles se trouvent en contact sur la roulette C_2 en un certain point P. La roue O_1 étant menante dans le sens de la flèche f_1, l'action de sa dent sur celle de sa conjuguée se traduit par une force d'intensité PR_2 dirigée suivant la normale commune PI aux deux dents en contact ; la réaction se traduit alors par une force PR_1 égale et contraire à la précédente.

Pour évaluer leur intensité commune, désignons par Q celle de l'effort moteur qui tend à faire tourner la roue O_1, par r_1 le segment de perpendiculaire abaissée du centre O_1 sur la droite PI et appliquons, par rapport à l'axe O_1, le théorème des moments. Il vient alors :

$$PR_1 = \frac{Q \times R_1}{r_1}.$$

Or, si nous désignons par α l'angle $\widehat{O_1IP}$, nous pouvons écrire :

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Par suite :

$$PR_1 = \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

L'effort normal des profils en contact est donc d'autant plus grand que l'angle α est lui-même plus petit ; il est par suite maximum aux extrémités des dents et comme il en est de même de l'arc élémentaire de glissement relatif, il n'y a rien de surprenant que le maximum d'usure se produise en ces points.

Les deux forces PR_1 et PR_2, transportées au point I et considérées comme des vecteurs, peuvent être décomposées chacune en deux autres dirigées, les unes suivant la tangente commune aux deux circonférences

Digitized by Google

primitives, les autres suivant la ligne des centres. Ces dernières appliquées, l'une à la roue O_1, l'autre à la roue O_2, exercent leurs actions variables sur les coussinets des paliers, en modifient les rayons et, par suite, rendent variable la distance des arbres.

Pour rendre ces forces aussi faibles que possible il y a donc lieu d'augmenter l'angle α, nouvelle raison pour laquelle nous lui donnerons dans la suite une valeur minimum de 75° environ.

24. Engrenage a flancs rectilignes et a courbes épicycloïdales.

α) **Tracé de l'engrenage.** — Au lieu de prendre, comme dans le tracé précédent, les diamètres des roulettes inférieurs aux rayons des circonférences primitives, nous les choisissons précisément égaux à ces rayons; les hypocycloïdes, profils des flancs des dents, deviennent alors des lignes droites § 23. Sauf cette modification l'épure (fig. 25) s'exécute de la même façon.

Les dents sont toutefois étranglées; mais leur différence d'épaisseur sur la circonférence primitive et sur la circonférence d'échanfriement est cependant assez faible pour que nous puissions la racheter au moyen d'un congé qui, comme nous allons l'établir, n'influe en rien sur les conditions de la transmission de mouvement.

La circonférence qui a pour centre le point O_2 et qui passe par le premier point P_1 de contact des dents, venant en effet couper au point C_2 le flanc des dents de la roue menante, le segment B_2C_2 qui en fait partie n'a aucune influence sur la transmission de mouvement; donc on peut le modifier de manière à éviter l'étranglement des dents. Toutefois, comme le nouveau profil doit permettre à l'extrémité A_1 de la dent conjuguée de se mouvoir en toute liberté lorsque la roue O_1 à laquelle elle appartient prend son mouvement relatif par rapport à l'autre roue, il doit être extérieur à l'épicycloïde rallongée $A_1C_2D_1$ qu'elle décrit dans le mouvement que nous venons de définir.

Par un raisonnement identique, nous pouvons modifier, comme l'indique la figure, le flanc des dents de la roue menée.

β) **Tracé d'une série.** — Il est impossible d'effectuer le tracé d'une série de roues à flancs rectilignes et à courbes épicycloïdales: les diamètres des roulettes sont en effet constants et ne peuvent être égaux aux rayons de toutes les roues de la série. Si nous voulons cependant utiliser une série de modèles en profitant de l'avantage des flancs droits, nous devons astreindre seulement la plus petite roue de la série à avoir des flancs rectilignes.

Digitized by Google

γ) **Remarque.** — Dans les tracés précédents, les roulettes de

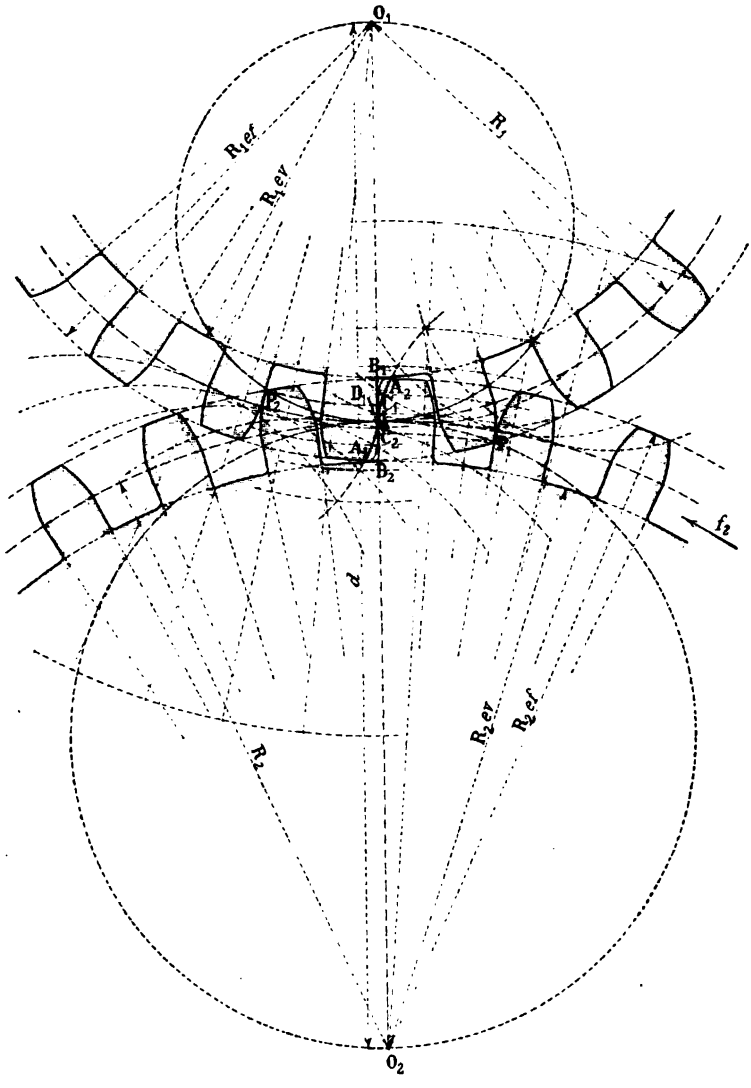


Fig. 25.

diamètres supérieurs aux rayons des circonférences primitives correspondantes doivent être rejetées car elles conduisent à des dents qui sont étranglées.

Digitized by Google

25. Engrenage a développantes de cercle.

α) **Tracé d'une développante de cercle.** — Pour effectuer le tracé de la développante du cercle O qui a pour origine le point I et qui se développe dans le sens indiqué par la flèche, nous divisons la circonférence O en douze parties égales, par exemple, et nous lui menons

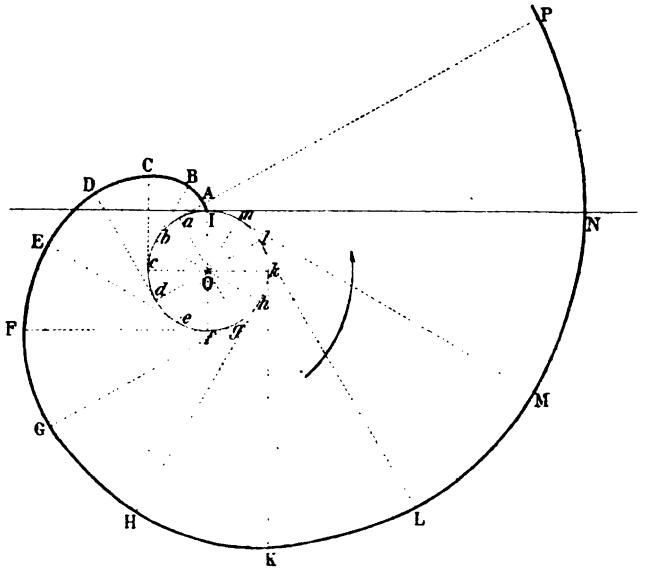


Fig. 26.

des tangentes aux points de division *a, b, c,* ..... obtenus. Sur chacune d'elles, nous portons respectivement les longueurs :

$$aA = \widehat{aI}, \qquad bB = \widehat{bI}, \qquad cC = \widehat{cI}, \ \ldots\ldots;$$

les points A, B, C, ... que nous déterminons ainsi appartiennent à la courbe cherchée.

Remarque. — Dans le cas où la développante à tracer doit passer par un point quelconque B et avoir pour normale en ce point la droite *b*B, nous déterminons son point d'origine I d'après la relation :

$$\widehat{bI} = bB$$

et nous achevons le tracé comme précédemment.

Par le point B passent deux développantes du cercle O ; elles admet-

Digitized by Google

tent respectivement pour normales en ce point les deux tangentes qu'on peut mener à la circonférence qui limite le cercle considéré.

β) **Recherche des profils des dents.** — Soient O_1 et O_2 les deux circonférences primitives de l'engrenage. Par leur point de contact I, traçons une droite inclinée d'un angle θ sur la ligne des centres et menons-lui des perpendiculaires O_1A_1, O_2A_2 par les centres O_1 et O_2; puis traçons les circonférences de rayons O_1A_1, O_2A_2 concentriques aux circonférences primitives. Leurs développantes B_1C_1 et B_2C_2, qui pas-

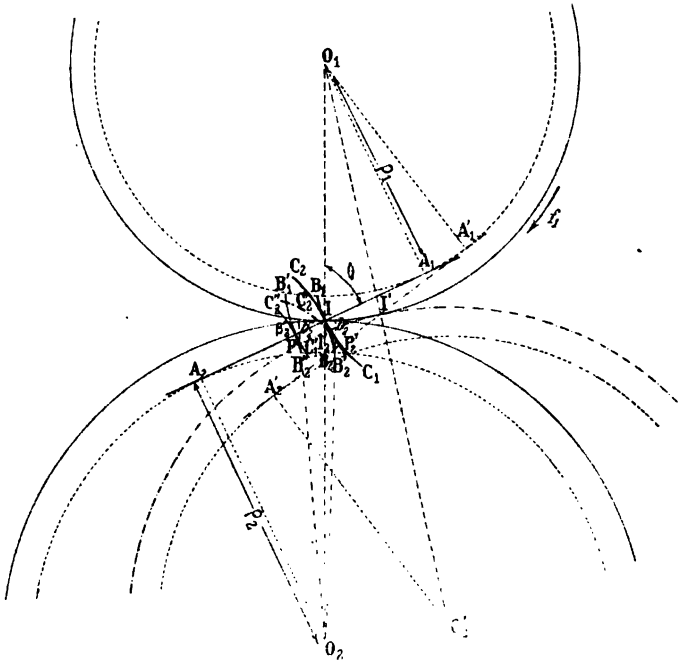


Fig. 27.

sent par le point I et qui admettent pour normale en ce point la droite A_1A_2, peuvent être adoptées pour profils conjugués des dents des roues O_1 et O_2.

Pour l'établir, il nous suffit de prouver que le profil B_2C_2 des dents de la roue O_2 a pour enveloppe le profil B_1C_1 des dents de la roue O_1 quand la circonférence O_2 roule sur la circonférence O_1. Considérons, à cet effet, une seconde position O'_2 de la roue O_2 correspondant à l'arc $\widehat{II'}$ de roulement et celle $B'_2C'_2$ du profil B_2C_2. Elle vient couper la circonférence O'_2 au point I'_2 déterminé par la relation :

$$\widehat{I'I'_2} = \widehat{II'}.$$

Digitized by Google

et si, du point I', centre instantané de rotation de l'époque considérée, nous lui menons une normale $I'P'_2$, elle est tangente à la circonférence $O'_2A'_2$ et son pied P'_2 appartient à l'enveloppe cherchée § 151.

Ceci posé, abaissons du point O_1 la perpendiculaire $O_1A'_1$ sur la droite $I'P'_2$ et considérons les deux triangles O_2IA_2 et $O'_2I'A'_2$; ils sont égaux comme ayant les hypoténuses égales et les côtés O_2A_2, $O'_2A'_2$ de l'angle droits égaux comme rayons de circonférences égales. Il en résulte que :

$$\widehat{O_2IA_2} = \widehat{O'_2I'A'_2}$$

ou bien encore :

$$\widehat{O_1IA_1} = \widehat{O_1I'A'_1}.$$

Les deux triangles rectangles O_1IA_1, $O_1I'A'_1$ qui ont les hypoténuses égales ainsi que les angles aigus en I et I', sont donc aussi égaux et nous pouvons écrire :

$$O_1A_1 = O_1A'_1.$$

L'enveloppe du profil B_2C_2 jouit donc de la propriété géométrique suivante : la normale en un quelconque P'_2 de ses points est tangente à la circonférence O_1A_1. Elle se confond par suite avec la développante du cercle O_1A_1 que nous avons tracée en B_1C_1 puisque nous plaçons les dents en contact en I sur la ligne des centres.

γ) **Lieu des contacts.** — La démonstration précédente montre clairement que le lieu des points de contact des dents coïncide avec le segment A_1A_2 de tangente commune aux cercles développés O_1A_1, O_2A_2. Nous pouvons d'ailleurs l'établir directement.

Supposons, à cet effet, la roue O_1 menante dans le sens de la flèche f_1 et figurons le profil $B'_1C'_1$ de ses dents lorsqu'elle a tourné d'un certain angle. Dans cette position il touche son conjugué au pied P de la droite qui lui est normale et qui passe par le point I, § 12, laquelle se confond avec la tangente commune A_1A_2 aux cercles développés, d'après une propriété de la développante de cercle.

δ) **Circonférences d'échanfrinement et d'évidement des dents.** — Pour fixer les idées, supposons que la roue O_2 soit la roue menante dans le sens de la flèche f_2 et admettons qu'à un moment donné le premier point B_2 du profil du flanc de ses dents soit en contact avec un point de la face conjuguée; sa position correspondante, qui appartient à la fois à la circonférence O_2A_2 et au lieu des contacts, coïncide par suite avec le point A_2. Il en résulte que les points extrêmes P_1 et P_2 de la ligne d'action se trouvent sur les segments IA_2, IA_1 eux-mêmes et non sur leurs prolongements. Pour les déterminer, considérons (fig. 27) les dents en contact en approche en un certain point P tel

Digitized by Google

que l'arc correspondant $I\beta'_2$ de circonférence primitive soit égal à s. La

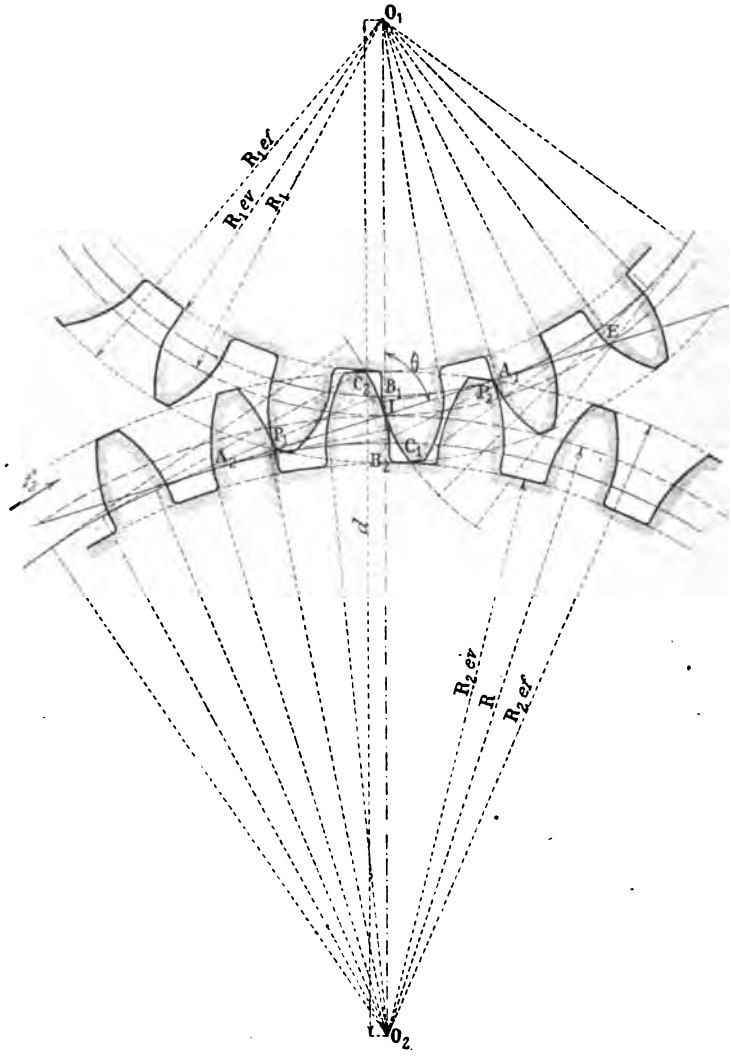


Fig. 28.

définition même de la développante de cercle fournissant les relations :

$$\widehat{A_2B_2} = A_2I$$

$$\widehat{A_2B''_2} = A_2P$$

en les retranchant membre à membre nous en déduisons la suivante :

$$\widehat{B_2B''_2} = IP.$$

Digitized by Google

Mais comme les rayons des points B_2, B''_2, tangents aux profils correspondants, viennent couper la circonférence primitive O_2 en des points b_2, b''_2, nous pouvons écrire :

$$\widehat{b_2 b''_2} = s.$$

Comme d'autre part, les deux arcs $\widehat{b_2 b''_2}$, $\widehat{B_2 B''_2}$ sont interceptés, sur des circonférences concentriques, par un même angle au centre, il en résulte que :

$$\frac{\widehat{B_2 B''_2}}{\widehat{b_2 b''_2}} = \frac{\rho_2}{R_2}.$$

Or :

$$\rho_2 = R_2 \sin \theta.$$

Par suite :

$$IP = s \times \sin \theta.$$

Si donc nous désignons par a et r les arcs d'approche et de retraite, les relations :

$$IP_1 = a \sin \theta, \qquad IP_2 = r \sin \theta.$$

définiront les points P_1 et P_2.

Le premier permet de tracer la circonférence O_1P_1 d'échanfrinement des dents de la roue menée, le second, la circonférence O_2P_2 d'échanfrinement des dents de la roue menante ; celles d'évidement s'en déduisent par l'intermédiaire du jeu.

ε) **Arcs maxima d'approche et de retraite.** — Au maximum IA_2 du segment IP_1 correspond celui de l'arc d'approche. Son expression est donc :

$$\frac{IA_2}{\sin \theta}$$

et comme le triangle O_2IA_2 donne :

$$IA_2 = R_2 \cos \theta$$

elle peut finalement s'écrire :

$$\frac{R_2}{\operatorname{tg} \theta}.$$

Par analogie, $\frac{R_1}{\operatorname{tg} \theta}$ exprime le maximum de l'arc de retraite pour une obliquité θ donnée de la ligne d'engrènement.

ζ) **Calcul de l'arc total de glissement relatif de deux dents.** — L'expression générale :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) l ds$$

de l'arc élémentaire de glissement relatif de deux dents d'engrenage,

Digitized by Google

dans laquelle nous remplacerons l par sa valeur $s.\sin\theta$ trouvée précédemment, devient pour le cas des profils à développantes de cercle :

$$\sin\theta\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)sds.$$

Celle de l'arc total peut alors s'écrire :

$$G=\int_o^a \sin\theta\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)sds+\int_o^r \sin\theta\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)sds$$

ou :

$$G=\sin\theta\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left[\int_o^a sds+\int_o^r sds\right]=\sin\theta\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{a^2+r^2}{2}.$$

Dans le cas particulier où :

$$a=r=p \qquad \text{et} \qquad \theta=75°$$

elle devient :

$$G=\sin 75°\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)p^2$$

ou :

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)p^2.$$

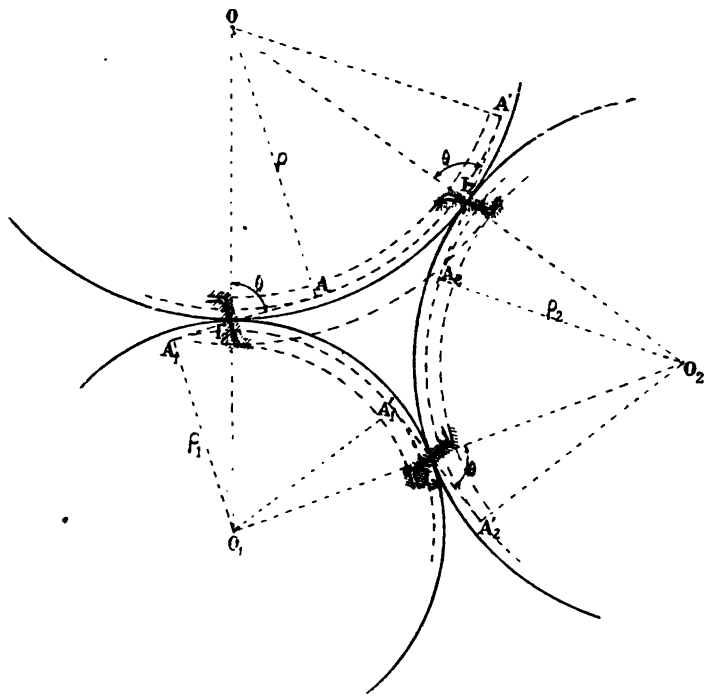


Fig. 29.

7) **Tracé d'une série.** — Considérons, par exemple, trois roues

Digitized by Google

O, O_1, O_2 d'une série, la plus grande, la plus petite et un pignon quelconque. Le tracé de l'engrenage $(O.O_1)$, pour une inclinaison θ de la ligne d'engrènement des dents, conduit à des circonférences développées OA, O_1A_1 de rayons ρ et ρ_1 ; celui de l'engrenage $(O.O_2)$, puisque le profil des dents de la roue ne doit pas se modifier, correspond à la même inclinaison θ de la ligne d'engrènement et par suite donne lieu seulement à une nouvelle circonférence développée O_2A_2 de rayon ρ_2.

Il est, dans ces conditions, facile d'établir que les pignons O_1 et O_2 engrènent ensemble, autrement dit, qu'il existe une droite passant par le point de contact I_3 de leurs circonférences primitives et normales aux deux profils trouvés c'est-à-dire tangentes aux circonférences de rayons ρ_1 et ρ_2.

Par le point I_3, menons, en effet, la normale au profil des dents du pignon O_1 : elle est tangente à la circonférence O_1A_1. Puis, du point O_2, menons-lui la perpendiculaire $O_2A'_2$ que nous désignons par ρ'_2. Si nous établissons que : $\rho'_2 = \rho_2$, la proposition sera démontrée. A cet effet, considérons les trois groupes de triangles semblables $(OI_1A, O_1I_1A_1)$, $(OI_2A', O_2I_2A_2)$, $(O_1I_3A'_1, O_2I_3A'_2)$; ils donnent les relations :

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{R}{R_1},$$

$$\frac{\rho}{\rho_2} = \frac{R}{R_2},$$

$$\frac{\rho_1}{\rho'_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Les deux premières divisées membre à membre, conduisent à la nouvelle proportion :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Comparée à la dernière, elle conduit à la conclusion :

$$\rho'_2 = \rho_2.$$

Dans le tracé des roues d'assortiment à développantes de cercle, *l'inclinaison θ de la ligne d'engrènement sur la ligne des centres doit donc rester constante et les hauteurs de pied et de tête des dents doivent être égales si l'on ne tient pas compte du jeu.*

θ) **Nombre minimum des dents du plus petit pignon.** — Le nombre minimum de dents du plus petit pignon d'une série à développantes de cercles s'obtient par les considérations que nous avons présentées § 36.

Digitized by Google

ι) **Effort normal des dents en contact.** — L'effort normal des dents en contact, évalué § 23, a pour expression $\frac{Q}{\sin\theta}$; il est donc constant. Toutefois, sur chaque dent, la courbure allant en diminuant vers la pointe, il se répartit sur une étendue de surface plus grande et la pression par unité de surface diminue. Comme d'autre part, l'arc élémentaire de glissement relatif de deux dents est maximum en même temps que l, c'est-à-dire à leurs extrémités, il en résulte que l'usure se répartit comme l'indique la figure.

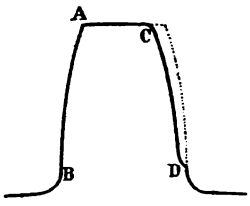


Fig. 30.

La pression des arbres sur les coussinets des paliers est donc constante et non pas variable comme dans le cas des engrenages à profils épicycloïdaux.

κ) **Propriétés remarquables de l'engrenage à développantes de cercle.** — *a)* Il est possible, au moyen d'un engrenage à développantes de cercle, de transmettre avec un rapport constant de vitesse angulaire, un mouvement de rotation entre deux arbres qui ne se rencontrent pas.

Nous savons en effet :

1° Qu'à tout point P, pris sur l'une des tangentes communes A_1A_2 à deux circonférences O_1, O_2, nous pouvons faire correspondre deux développantes (D_1), (D_2) de ces cercles normales à la roite A_1A_2.

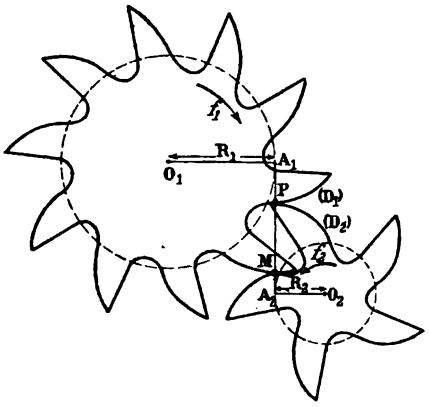


Fig. 31.

2° Que si la roue O_1 est motrice et tourne d'un mouvement uniforme, dans le sens de la flèche f_1, la dent (D_1) conduit la dent conjuguée (D_2) et communique à la roue O_2 un mouvement également uniforme.

Ceci posé, faisons tourner le plan de la roue O_2 d'un certain angle autour de la tangente commune A_1A_2 tout en maintenant fixe celui de la roue O_1 :

Le centre O_2 se déplaçant sur une circonférence de centre A_2 et de rayon O_2A_2, dont le plan est perpendiculaire à la tangente commune

Digitized by Google

A_1A_2, les deux axes de rotation ne sont plus dans un même plan et le contact des dents, qui précédemment avait lieu tout le long de la génératrice P parallèle aux deux arbres, se fait alors au point P seulement.

Le contact des dents en un point suffit pour assurer la transmission de mouvement avec rapport de vitesses angulaires constant à la condition toutefois que la résistance à vaincre ne soit pas trop considérable, car l'engrenage qui, en premier lieu, appartenait à la catégorie des engrenages de force, après modification, appartient à celle des engrenages de précision.

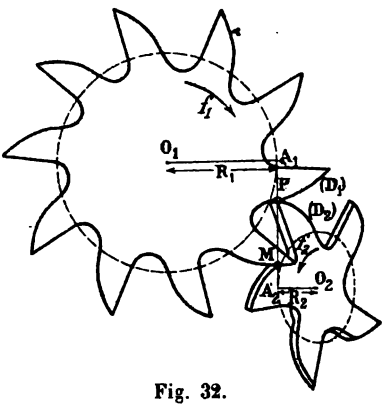


Fig. 32.

b) La relation :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

trouvée précédemment, montre que le rapport des vitesses angulaires ne dépend pas des circonférences primitives mais simplement des circonférences développées. Si, donc, la distance des arbres vient à varier, par suite de l'usure des coussinets des paliers, par exemple, l'engrenage fonctionne encore avec un rapport constant de vitesses angulaires.

26. Engrenage a lanterne.

Avant d'étudier l'engrenage à lanterne, nous croyons utile de rappeler quelques résultats acquis en géométrie et qui trouveront leur application dans l'analyse qui va suivre.

α) **Recherche de l'enveloppe d'une circonférence de rayon ρ constant dont le centre décrit une courbe connue** (C). — L'enveloppe d'une circonférence de rayon constant dont le centre décrit une courbe connue (C) s'obtient en portant sur les différentes normales à la courbe, à partir de leurs pieds O_1, O_2, ... des longueurs O_1A_1, O_2A_2, ..., O_1B_1, O_2B_2, ... égales à ρ et en joignant par un trait continu, d'une part, les points A_1, A_2, ..., d'autre part, les points B_1, B_2, ...

Soient, en effet, O_1 et O_2 deux positions de la circonférence donnée;

Digitized by Google

les positions limites de leurs points communs M et N, lorsque le centre O_2 se rapproche indéfiniment du centre O_1, appartiennent à l'enveloppe cherchée. Or la droite MN, perpendiculaire à la droite O_1O_2 en son

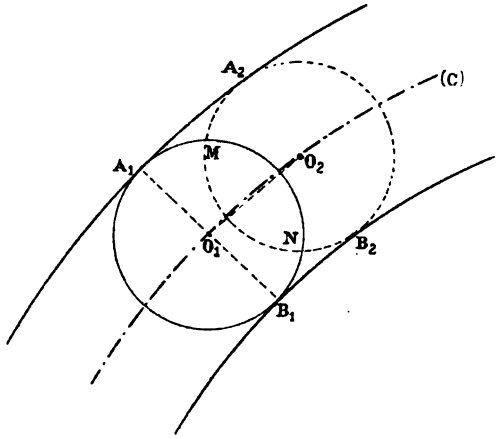


Fig. 33.

milieu comme axe radical de deux circonférences égales, a pour position limite la normale à la courbe C au point O_1, et les points A_1 et B_1 où elle vient couper la circonférence O_1 appartiennent à l'enveloppe cherchée.

En particulier, l'enveloppe d'une circonférence dont le centre décrit une épicycloïde, se compose de deux épicycloïdes dont les points de rebroussement se trouvent sur la développée de la première.

3) **Limaçon de Pascal.** — Le *limaçon de Pascal* est la courbe lieu des points M et M′ obtenus en portant sur les différents rayons vecteurs OA, qui joignent un point fixe O à un point variable A d'une circonférence, à partir du point A, des longueurs égales et constantes AM, AM′. Sa forme correspond à celle indiquée sur la figure ci-contre.

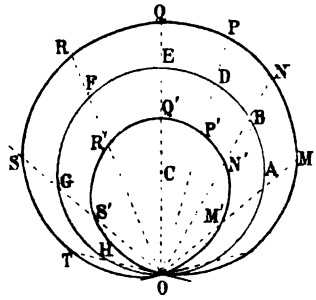


Fig. 34.

γ) **Recherche des profils des dents.** — L'engrenage à *lanterne ou à fuseaux,* généralement en bois, se compose d'une roue appelée *lanterne* dont les dents ou fuseaux sont des cylindres de révolution mobiles autour de leurs axes et qui sont implantés comme l'indique la figure 35 sur des plateaux circulaires calés sur l'arbre de

Digitized by Google

la lanterne. La seconde roue porte le nom de *rouet* et chacune de ses dents celui *d'alluchon*.

Pratiquement, cet engrenage offre quelques avantages : les dents de la lanterne sont faciles à tailler et peuvent se remplacer sans difficulté après usure ; de plus, leur mobilité autour de leurs axes répartit cette

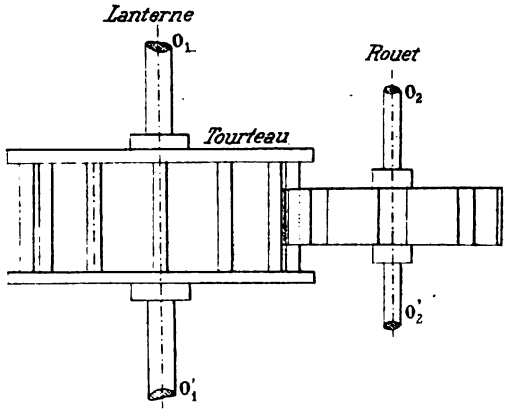


Fig. 35.

usure sur une plus grande étendue de surface et l'amoindrit par conséquent. Malgré cela, il présente un défaut capital qui restreint son emploi à l'horlogerie et à la meunerie : la conduite en retraite n'existe pour ainsi dire pas.

Le profil des dents de la lanterne O_1 est une circonférence ; son enveloppe, lorsque la circonférence primitive de cette roue roule sur celle du rouet, sert de profil aux alluchons. Pour la déterminer, remarquons (fig. 36) que lorsque la circonférence O_1 roule sur la circonférence O_2, le point O, centre du profil connu, décrit une épicycloïde CE qui admet pour développée l'épicycloïde CD. Le profil des dents du rouet assimilable à l'une des courbes enveloppes d'une circonférence de rayon ρ constant dont le centre décrit l'épicycloïde CE coïncide par suite avec l'épicycloïde A_2B_2 qui laisse l'enveloppée à son extérieur. Elle possède sur sa développée CD un point A_2 de rebroussement, en sorte que le profil trouvé donne à la fois du flanc IA_2 et de la face IB_2 aux dents du rouet. Toutefois comme l'arc IA_2 est très petit, la conduite en retraite est très faible dans le cas où la lanterne est la roue menante.

δ) **Circonférences d'échanfrinement et d'évidement des dents.** — Sur la circonférence de la roue menante O_1, portons de I en α_1 un arc égal à l'arc d'approche a ; puis, par son extrémité α_1, faisons

Digitized by Google

passer le profil du flanc de la lanterne. Il correspond à celui d'une dent de la roue O_1 au moment où elle entre en contact avec sa conjuguée. Si donc, du point I, nous lui menons une normale, son pied P_2 sera le

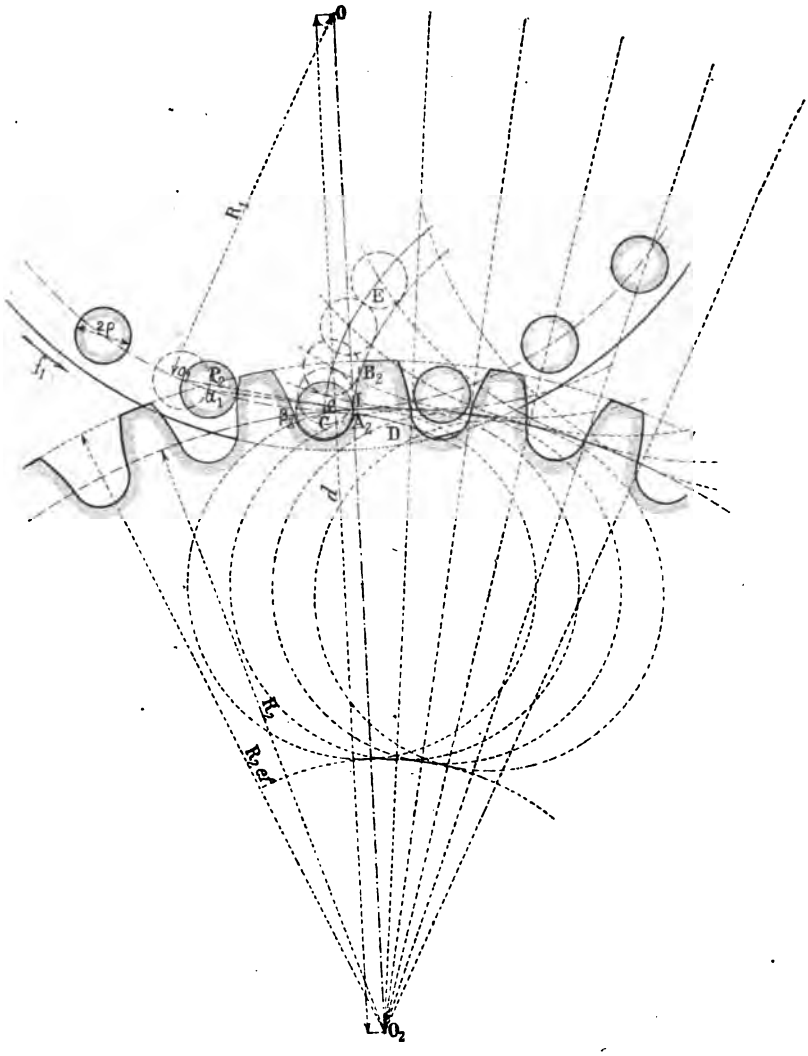


Fig. 39.

premier point de contact des dents et la circonférence d'échanfrinement des dents du rouet aura pour centre le point O_2 et pour rayon O_2P_2.

L'évidement du fond des dents, nécessité par la condition de loger les fuseaux, a une forme arbitraire. Le profil circulaire qu'on peut

Digitized by Google

lui faire correspondre se raccordant au point A_2 au profil précédemment défini a donc son centre au point de rencontre du rayon passant par le milieu du creux $I\beta_2$ avec la tangente en A_2 à la développée de l'épicycloïde.

ε) **Lieu des contacts.** — La ligne d'action des dents coïncide avec le lieu des pieds des perpendiculaires menées du point I aux différentes positions du profil circulaire des dents de la lanterne. Ils s'obtiennent graphiquement en joignant le point I aux différents points de l'arc $\widehat{Io_1}$ et en portant sur chacune des droites obtenues, du point o_1 vers le point I, une longueur ρ égale au rayon du fuseau; ils appartiennent par suite à un *limaçon de Pascal*. Sa pénétration, légère il est vrai, à l'intérieur de la circonférence primitive du rouet, atteste une nouvelle fois que la conduite de l'engrenage a lieu un peu après la ligne des centres.

ζ) **Calcul de l'arc total de glissement relatif de deux dents.** — Le calcul est identique à celui que nous avons exposé dans la théorie des engrenages à courbes épicycloïdales. Pour obtenir l'arc cherché, il suffit donc d'exprimer, en confondant la corde de longueur ρ, rayon du fuseau, avec l'arc de circonférence primitive de la lanterne qui lui correspond, que la corde $l + \rho$ intercepte un arc $s + \rho$ sur cette même circonférence.

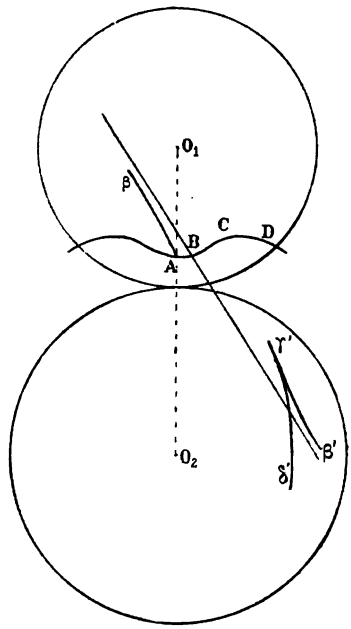


Fig. 37.

η) **Modifications apportées à l'engrenage.** — M. George Grant, ingénieur américain, dans le but d'obtenir une conduite en retraite plus appréciable que celle du cas précédent, s'est le premier demandé s'il ne serait pas possible de répartir les centres des fuseaux sur une circonférence concentrique et intérieure à la circonférence primitive de la lanterne. Sa théorie malheureusement, manquait de généralité ; c'est pourquoi elle fut reprise par M. Lecornu, professeur à l'école polytechnique. Nous nous contenterons d'indiquer le principe de sa solution et nous renverrons les lecteurs désireux d'entrer dans le détail du calcul au *Bulletin de la Société mathématique de France*.

Digitized by Google

Dans le cas actuel, le lieu du centre du fuseau, lorsque la circonférence O_1 de la lanterne roule sur celle O_2 du rouet, n'est plus une épicycloïde ordinaire mais une épicycloïde raccourcie, symétrique par rapport à la ligne des centres; sa branche ABCD..... présente deux sommets A et C comprenant entre eux un point d'inflexion B. Son rayon de courbure, d'abord nul, augmente donc pour devenir infini, puis diminue, atteint un minimum et augmente ensuite. Sa développée se compose donc de deux arcs de courbe $A\beta$, $\beta'\gamma'\delta'$, ayant la forme indiquée par la figure 37 et admettant une même asymptote $\beta\beta'$.

Le profil du rouet, enveloppe d'une circonférence de rayon constant dont le centre se déplace sur l'épicycloïde ABCD....., est une seconde épicycloïde qui, pratiquement, ne doit pas présenter de points de rebroussement et par conséquent ne doit pas rencontrer la développée précédente. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le rayon ρ du fuseau soit inférieur au rayon de courbure qui correspond au deuxième sommet de l'épicycloïde, condition qui s'exprime par l'inégalité :

$$\delta > \frac{\left(1+\frac{2R_2}{R_1}\right)^3 \rho^2}{54\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)^2 R_2}$$

où δ mesure la différence entre le rayon de la circonférence primitive de la lanterne et celui de la trajectoire, lieu du centre des fuseaux.

27. Engrenage a flancs rectilignes divergents.

α) **Recherche des profils.** — Soient O_1 et O_2 les circonférences primitives de l'engrenage, I leur point de contact, R_1 et R_2 leurs rayons.

Du point O_1 comme centre, avec un rayon ρ_1 égal à environ $\frac{R_1}{6}$, décrivons une circonférence et traçons celle du centre O_2 et de rayon ρ_2 qui lui est homothétique par rapport au point I. Adoptons pour flancs des dents de la roue O_1 des tangentes à la circonférence ρ_1; pour flancs des dents de la roue O_2 des tangentes à la circonférence ρ_2. Les flancs des deux dents que nous plaçons en contact au point I sur la ligne des centres, sont alors confondus avec celle des deux tangentes communes aux circonférences précédentes, qui n'étrangle pas les dents. Nous l'avons figurée en B_1IB_2 dans le cas où la roue O_2 est menante dans le sens de la flèche f_2.

En approche, les points α'_2, α''_2, α'''_2, ..., du flanc des dents de a

Digitized by Google

roue menante, viennent en contact avec la face des dents de la roue

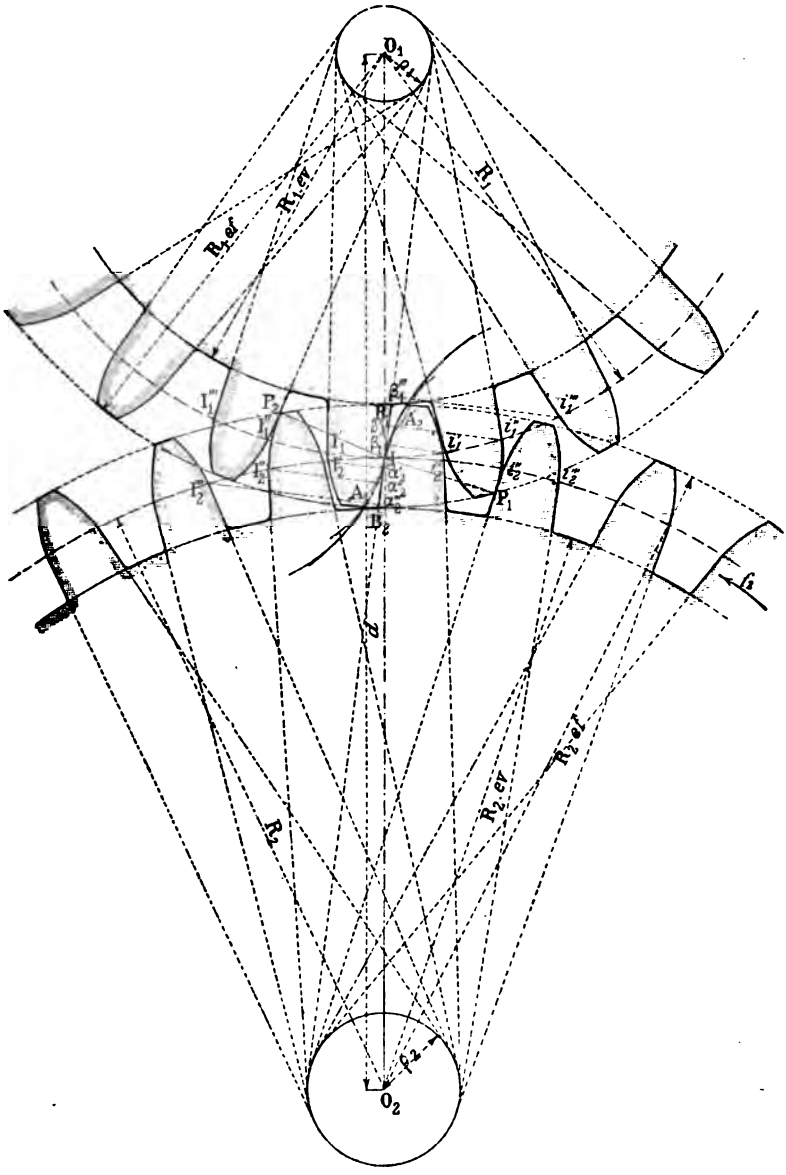


Fig. 38.

menée ; leurs normales communes sont donc : $I'_2x'_2$, $I''_2x''_2$, $I'''_2x'''_2$, ... Si donc (*construction de Poncelet*), des points I'_1, I''_1, I'''_1, ..., homologues des points I'_2, I''_2, I'''_2, ..., avec des rayons respectivement

Digitized by Google

égaux aux longueurs des normales précédentes, nous décrivons des arcs de circonférences et si nous prenons leur enveloppe, nous obtenons la face IA_1 cherchée.

La recherche de la face IA_2 des dents de la roue menante se fait par des constructions identiques indiquées sur la figure.

β) **Circonférences d'échanfrinement et d'évidement des dents.** — Sur la circonférence primitive O_2, de I en i''_2, portons un arc a égal à l'arc d'approche et de son extrémité i''_2 menons, à la circonférence ρ_2, la tangente i''_2P capable dans la rotation de se superposer à IB_2. Elle correspond au flanc des dents de la roue menante au moment où il entre en prise avec la face conjuguée au point P_1, pied de la normale issue du point I. La circonférence de centre O_1 et de rayon O_1P_1 échanfrine donc les dents de la roue menée.

L'arc II''_1 étant égal à l'arc de retraite r, le pied P_2 de la perpendiculaire abaissée du point I sur le flanc I''_1P_2 correspond au dernier point de la ligne d'action ; il appartient donc à la circonférence d'échanfrinement des dents de la roue menante.

Les circonférences d'évidement des roues se déduisent des précédentes par l'intermédiaire du jeu.

γ) **Lieu des contacts.** — Pendant l'approche, les points de contact des dents coïncident avec les pieds des perpendiculaires abaissées

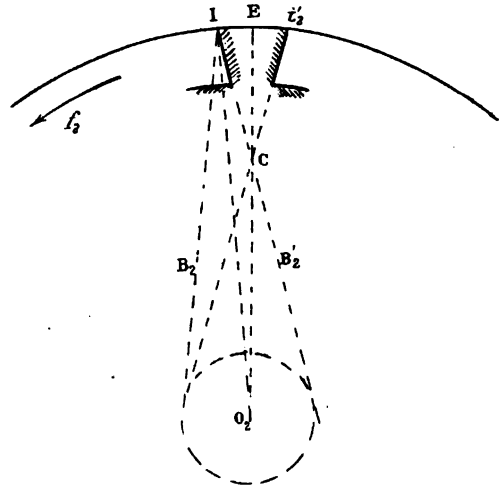


Fig. 39.

du point I sur les différentes tangentes à la circonférence ρ_1 ; leur lieu se compose donc d'un arc de *podaire* du cercle ρ_1.

Digitized by Google

Par analogie, le lieu de leurs points de contact pendant la retraite se compose d'un arc de *podaire* du cercle ρ_2.

δ) **Remarque.** — Sur l'épure précédente, nous avons pris la tangente commune B_1IB_2 pour flanc des dents de la roue O_2; il nous est facile d'établir (fig. 39) que l'autre tangente IB'_2 aurait étranglé la dent. En effet, pour assurer à l'engrenage la réciprocité dont nous avons déjà parlé, il faut que les deux flancs d'une même dent soient symétriques par rapport au rayon O_2E qui passe par le milieu de l'épaisseur Ii'_2 de la dent considérée. Si donc IB'_2 était l'un, l'autre serait i'_2C; ils se couperaient alors au point C et convergeraient au lieu de diverger.

ε) **Nombre minimum de dents du pignon.** — Pour que les flancs des dents soient bien divergents il faut que :

$$\rho_1 \geqslant e.$$

Or :

$$e = \frac{11p}{24}$$

$$\rho_1 = \frac{R_1}{6},$$

et

$$2\pi R_1 = Z_1 p.$$

Par suite :

$$Z_1 \geqslant \frac{11\pi}{2}.$$

ce qui exige que le pignon ait au moins 17 dents.

ζ) **Tracé d'une série.** — Le profil de la face des dents de la roue O_2 dépendant de la circonférence primitive de la roue O_1, il en résulte que le tracé d'une série à flancs rectilignes divergents est impossible.

28. Engrenage a denture mixte.

Denture à cames. — La condition que nous avons imposée § 18 aux deux profils d'une même dent, pour assurer la réciprocité de l'engrenage correspondant, n'est nullement nécessaire. Pour la satisfaire, nous pouvons fort bien adopter pour l'un, une courbe épicycloïdale, pour l'autre, une développante de cercle. La denture correspondante obtenue, connue sous le nom de *denture à cames,* est très avantageuse au point de vue de la transmission de mouvement et de la

Digitized by Google

résistance des dents. Nous ne croyons pas devoir insister sur le tracé de l'épure qui n'est qu'une combinaison de deux tracés précédents.

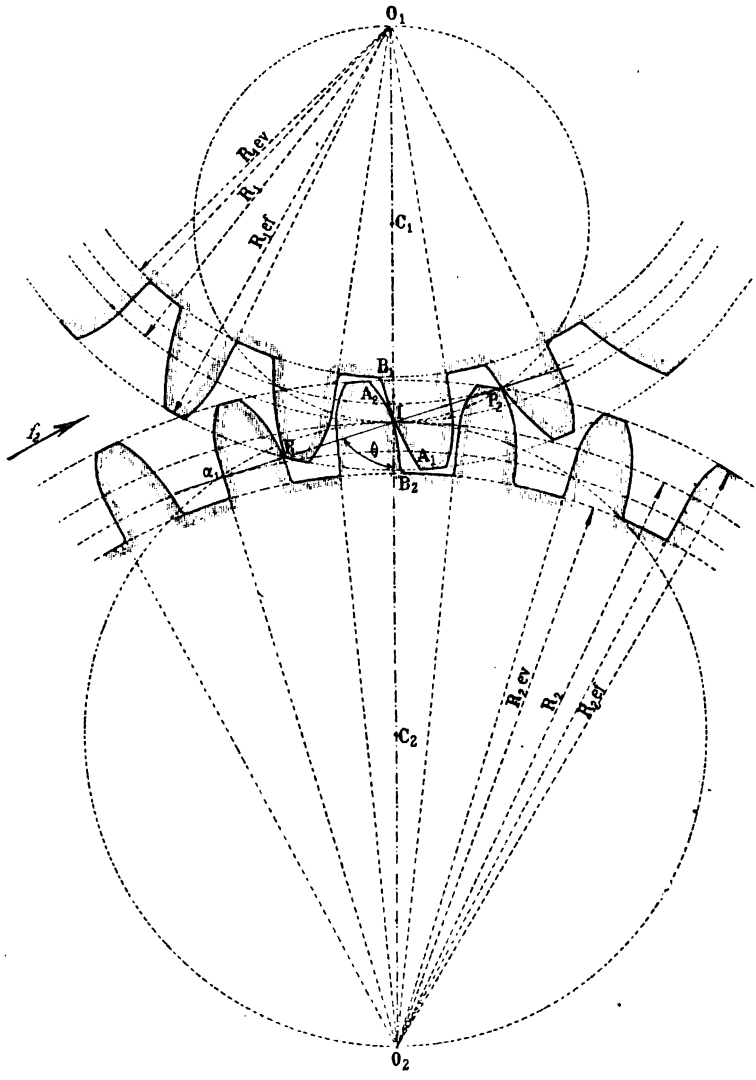


Fig. 40.

29. Tracés approchés.

1° *Tracé Willis par un arc de cercle.*

α) La recherche laborieuse des profils épicycloïdaux et à développantes de cercle a conduit Willis à son tracé par un arc de cercle.

Digitized by Google

La théorie de l'engrenage à lanterne a établi nettement que deux arcs de circonférences ne sont pas des profils conjugués. Si cependant nous les admettons comme tels, le rapport des vitesses angulaires des arbres de l'engrenage correspondant n'est plus constant; mais comme les limites entre lesquelles il varie sont assez rapprochées l'une de l'autre, la pratique s'accommode de ces variations et admet fort bien le tracé.

A chaque instant, la normale commune à deux profils non conjugués qui se trouvent en prise ne passe plus par le point de contact des circonférences primitives. C'est pourquoi dans le tracé Willis par un arc de cercle cette condition se trouve remplie pour un point seulement de la ligne d'action et comme Willis n'avait aucune raison pour le prendre plutôt en approche qu'en retraite, il choisissait le point de contact lui-même de ces circonférences. Il assujettissait ainsi les arcs de circonférence, profils des dents de l'engrenage, à se trouver en contact au point I sur une droite inclinée d'environ 75° sur la ligne O_1O_2.

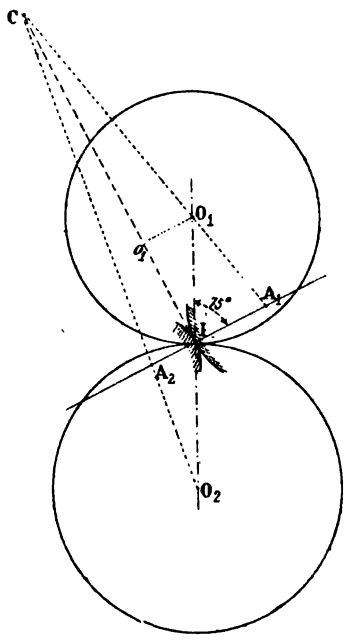


Fig. 41.

Pour déterminer leurs centres A_1 et A_2, étudions le déplacement élémentaire de la droite A_1A_2. Celui du point A_1 étant un arc infiniment petit de circonférence O_1A_1, à l'instant considéré, la normale à la trajectoire de ce point coïncide avec le rayon O_1A_1; pour la même raison, à la même époque, la normale à la trajectoire du point A_2 coïncide avec le rayon O_2A_2. Leur point de rencontre C, d'après le théorème de Chasles, correspond donc au centre instantané de rotation de l'époque considérée. Comme d'autre part, le contact des dents se fait au point I, non pas à un instant, mais pendant un temps infiniment petit, la droite A_1A_2 et sa position infiniment voisine se coupent en ce point et il appartient par suite à l'enveloppe de la droite qui nous occupe. Si, donc, nous appliquons le théorème démontré § 151, concernant la normale commune à l'enveloppe et à l'enveloppée, nous sommes conduits à la conclusion suivante: A l'époque considérée la perpendiculaire au point I à la droite A_1A_2 contient le centre instantané C de rotation.

Digitized by Google

Nous pouvons donc obtenir les points A_1 et A_2 par le procédé suivant: Nous traçons la droite A_1A_2 inclinée de 75° environ sur la ligne des centres ; puis, sur la droite qui lui est perpendiculaire au point I, nous prenons un point arbitraire C que nous joignons aux centres O_1 et O_2 des deux roues. Les droites CO_1, CO_2 ainsi obtenues viennent couper la droite A_1A_2 aux points cherchés.

β) **Formes variables des profils.** — La construction précédente n'assigne au point C aucune position particulière sur la droite IC ;

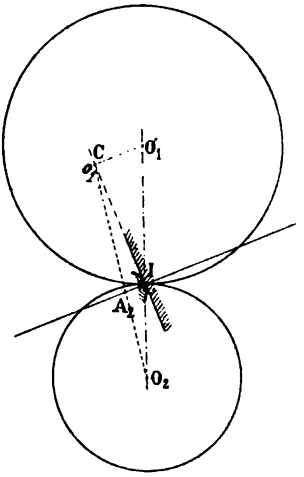


Fig. 42.

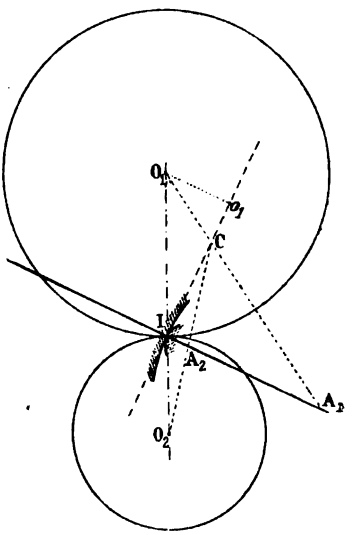


Fig. 43.

il est donc tout naturel de le déplacer sur cette droite et d'examiner les formes correspondantes des profils des dents. Pour cela, projetons sur IC le centre O_1 en o_1 et supposons :

a) Le point C au-dessus du point o_1. — Les points A_1 et A_2 occupent alors par rapport au point I la disposition indiquée sur la figure 41 et conduisent à des dents convexes.

b) Le point C coïncide avec le point o_1. — Les droites parallèles o_1O_2 et A_1A_2 se coupent à l'infini. Comme l'indique la figure 42 le profil des dents de la roue O_1 est rectiligne tandis que celui de roue O_2 est convexe.

c) Le point C est au-dessous du point o_1. — Les deux points A_1 et A_2 sont alors d'un même côté du point I. Le profil des dents de la roue O_1 est alors concave, comme l'indique la figure 43, tandis que celui de la roue O_2 est convexe.

Digitized by Google

Pour obtenir des formes normales de profils, Willis plaçait le point C au-dessus du point o_1 et comme il n'avait aucun motif pour le prendre

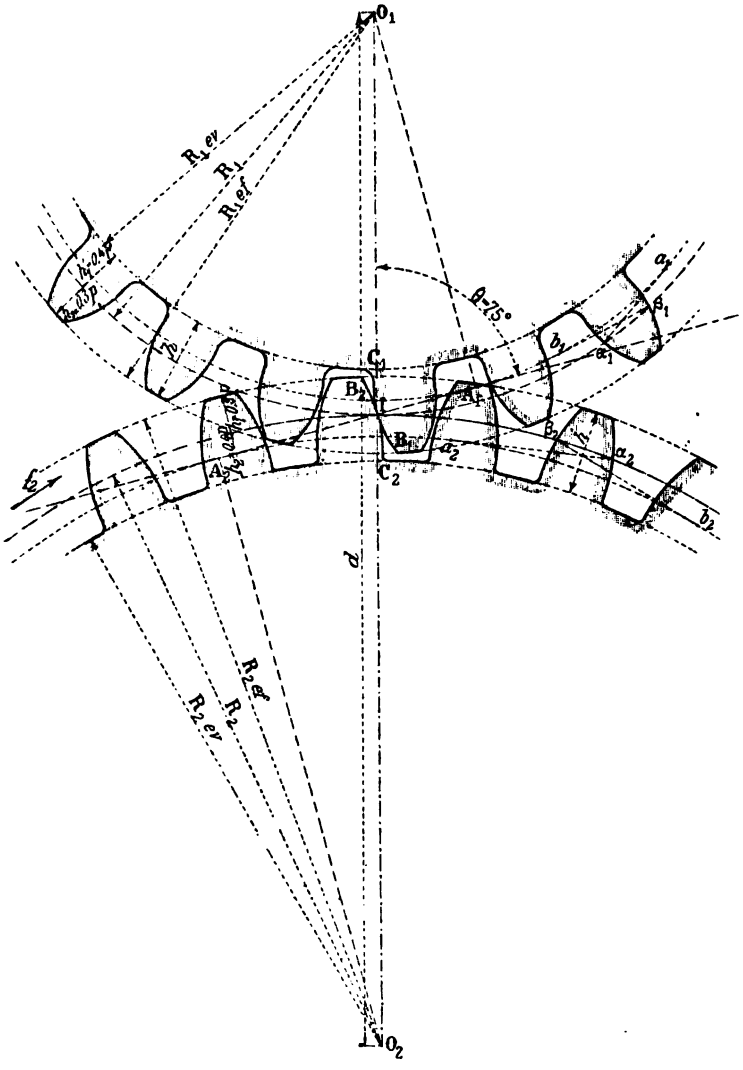


Fig. 44.

en un point à distance finie plutôt qu'en un autre, il le supposait à l'infini. Dans ce cas les points A_1 et A_2 deviennent alors les pieds des perpendiculaires abaissées des centres O_1 et O_2 sur la droite A_1A_2.

γ) **Tracé d'une dent.** — Proposons-nous, connaissant l'épaisseur $\alpha_1\beta_1$ d'une dent de la roue O_1, d'effectuer son tracé.

Digitized by Google

La théorie précédente nous a prouvé que les profils des dents de la roue O_1 (fig. 44) étaient des arcs de circonférence de rayon IA_1 et que la circonférence O_1A_1 était le lieu de leurs centres. Si donc, des points α_1 et β_1, nous lui menons des tangentes $\alpha_1 a_1$, $\beta_1 b_1$, la première de même sens que le segment IA_1, la seconde de sens inverse, leurs points de contact a_1 et b_1 seront les centres des profils cherchés.

Les circonférences d'échanfrinement et d'évidement des dents ont respectivement pour rayon $R_1 + 0{,}3p$ et $R_1 - 0{,}4p$.

δ) **Remarque.** — Les constructions générales qui conduisent à la détermination des points A_1 et A_2 sont identiques à celles que fournirait la recherche, par la méthode de Savary § 160, du centre de courbure A_1 du profil des dents de la roue O_1, lorsqu'on connaît celui A_2 du profil conjugué. Nous pouvons, en effet, regarder ce point A_1 comme le centre de courbure relatif au point I de l'enveloppe de la circonférence A_2I, lorsque la circonférence O_2 roule sur la circonférence O_1.

ε) **Tracé d'une série.** — Le centre A_1 du profil des dents de la roue O_1 ne dépendant pas de la roue O_2, il est possible de construire, par le tracé Willis à un arc de cercle, des roues d'assortiment.

2° *Tracé Willis par deux arcs de cercle.*

α) Dans le tracé général précédent, nous avons été conduits à prendre sur la droite IC un point C à distance finie au-dessus de la droite AA'. Comme nous n'avions aucune raison pour le placer plutôt au-dessus qu'au-dessous, nous devions être tout naturellement conduits, comme Willis, à en prendre deux C et D disposés, d'après la discussion précédente, de part et d'autre du point I de telle façon que les longueurs égales IC et ID soient inférieures au segment Io_1, projection sur IC du plus petit rayon des deux circonférences primitives. En les joignant aux centres O_1 et O_2, nous déterminons sur la droite A_1A_2 deux couples de points $(A_1.A_2)$, $(B_1.B_2)$ qui sont les centres des profils conjugués cherchés. En leur imposant la condition de se trouver en contact sur la droite A_1A_2 un demi-pas avant la ligne des centres et un demi-pas après, les arcs d'approche et de retraite étant supposés égaux à un pas, nous obtiendrons leurs rayons.

L'inclinaison donnée à la droite A_1A_2 suppose que la roue O_2 est menante dans le sens de la flèche f_2; nous pouvons donc porter sur la circonférence primitive de cette roue en approche et en retraite des arcs $I\alpha_2$, $I\beta_2$ égaux à un demi-pas et faire passer par le point α_2 le flanc des dents de la roue menante qui sera en contact au point P_1 avec la face des dents de la roue menée; leurs centres respectifs sont donc les

Digitized by Google

points B_2 et B_1 et leurs rayons sont mesurés par les segments $B_2\alpha_2$ et B_1P_1. Un raisonnement analogue au précédent montre que les points A_2

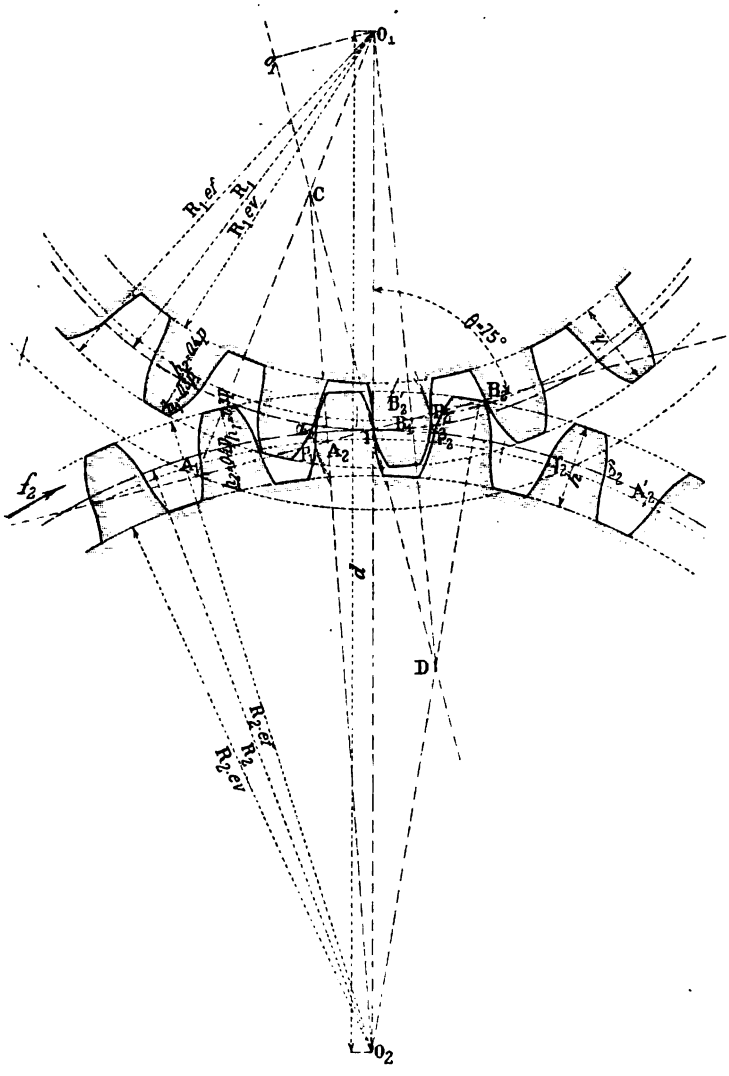


Fig. 45.

et A_1 sont les centres des face et flanc des roues menante et menée et que leurs rayons sont respectivement égaux aux segments $A_2\beta_2$, A_1P_2.

β) **Tracé d'une dent de la roue O_2.** — Proposons-nous (fig. 45) d'effectuer le tracé de la dent de la roue O_2 qui correspond à l'épaisseur $\gamma_2\delta_2$. Les deux profils qui la limitent étant symétriques par rapport au rayon

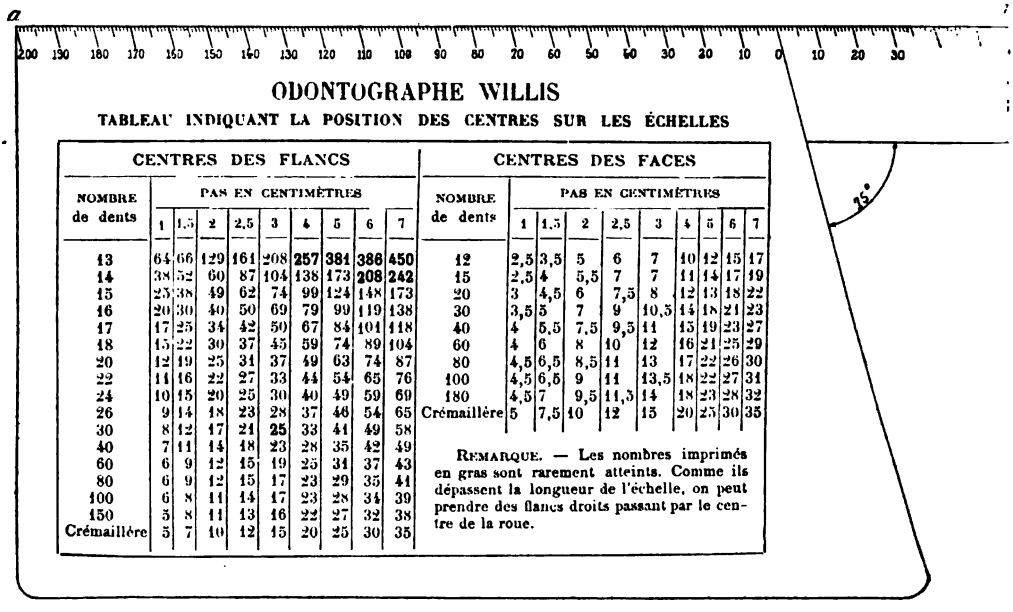
Digitized by Google

qui passe par le milieu de son épaisseur, il suffit d'effectuer le tracé de l'un d'eux, celui, par exemple, qui contient le point γ_2.

Les circonférences de centre commun O_2 qui contiennent les points A_2 et B_2 étant les lieux des centres des faces et flancs des dents de la roue O_2, leurs points de rencontre B'_2 et A'_2 avec les arcs de circonférences décrits du point γ_2 comme centre, avec des rayons respectivement égaux à $B_2\alpha_2$ et $A_2\beta_2$, sont les centres des profils cherchés.

Comme précédemment, nous donnons aux dents des hauteurs de pied et de tête égales à $0{,}3p$ et $0{,}4p$.

γ) **Odontographe.** — Une règle graduée, appelée odontographe,



ODONTOGRAPHE WILLIS

TABLEAU INDIQUANT LA POSITION DES CENTRES SUR LES ÉCHELLES

CENTRES DES FLANCS									
NOMBRE de dents	PAS EN CENTIMÈTRES								
	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7
13	64	66	129	161	208	**257**	**381**	**386**	**450**
14	38	52	60	87	104	138	173	**208**	**242**
15	25	38	49	62	74	99	124	148	173
16	20	30	40	50	69	79	99	119	138
17	17	25	34	42	50	67	84	101	118
18	15	22	30	37	45	59	74	89	104
20	12	19	25	31	37	49	63	74	87
22	11	16	22	27	33	44	54	65	76
24	10	15	20	25	30	40	49	59	69
26	9	14	18	23	28	37	46	54	65
30	8	12	17	21	**25**	33	41	49	58
40	7	11	14	18	23	28	35	42	49
60	6	9	12	15	19	25	31	37	43
80	6	9	12	15	17	23	29	35	41
100	6	8	11	14	17	23	28	34	39
150	5	8	11	13	16	22	27	32	38
Crémaillère	5	7	10	12	15	20	25	30	35

CENTRES DES FACES								
NOMBRE de dents	PAS EN CENTIMÈTRES							
	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7
12	2,5	3,5	5	6	7	10	12	15	17
15	2,5	4	5,5	7	7	11	14	17	19
20	3	4,5	6	7,5	8	12	13	18	22
30	3,5	5	7	9	10,5	14	18	21	23
40	4	5,5	7,5	9,5	11	15	19	23	27
60	4	6	8	10	12	16	21	25	29
80	4,5	6,5	8,5	11	13	17	22	26	30
100	4,5	6,5	9	11	13,5	18	22	27	31
180	4,5	7	9,5	11,5	14	18	23	28	32
Crémaillère	5	7,5	10	12	15	20	25	30	35

REMARQUE. — Les nombres imprimés en gras sont rarement atteints. Comme ils dépassent la longueur de l'échelle, on peut prendre des flancs droits passant par le centre de la roue.

Fig. 46.

permettait à Willis de déterminer facilement les centres du flanc et de la face d'une même dent. Comme l'indique la figure 46, elle avait la forme d'un trapèze rectangle dont le côté oblique était incliné de 75° sur la grande base et dont la petite base portait une double graduation dont le zéro correspondait au côté oblique. Elle contenait deux tables qui indiquaient en centimètres les rayons des circonférences flancs et faces des dents d'une roue suivant son nombre de dents et la valeur du pas circonférentiel.

δ) **Recherche des centres de la face et du flanc d'une dent.** — Sachant que la roue O d'un engrenage a 30 dents, que le pas circon-

Digitized by Google

férentiel est de 3 centimètres, proposons-nous de rechercher le profil d'une dent, celle, par exemple, qui passe par le point de division I.

Portons à cet effet, de part et d'autre du point I, sur la circonférence O des arcs égaux Iα et Iβ valant chacun un demi-pas c'est-à-dire $1^{cm},5$, puis regardons le point α comme le point de contact des deux roues. Le profil de la face de la dent de la roue O, d'après les hypothèses précédentes, se trouve en contact avec le flanc conjugué sur une droite qui fait avec le rayon Oα un angle de 75°; c'est pourquoi nous donnons à l'odontographe la disposition indiquée par la figure 47. Puis, dans la table relative aux centres des faces, nous prenons le nombre 10,5 qui se trouve au point de croisement de la ligne 30 et de la colonne 3. Le point C qui lui correspond sur la règle graduée n'est autre que le centre de l'arc de circonférence de rayon CI qui permet de tracer le profil IA cherché.

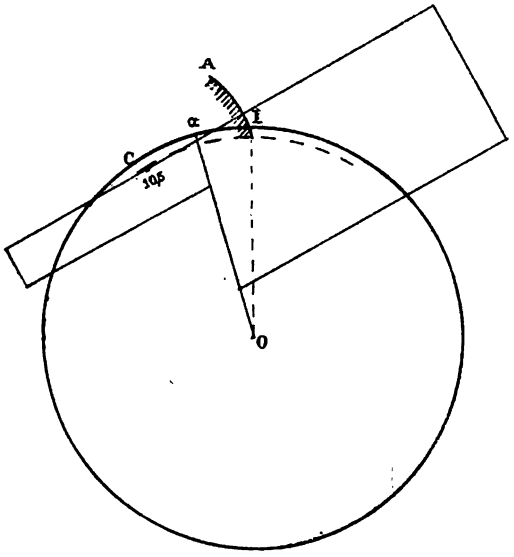


Fig. 47.

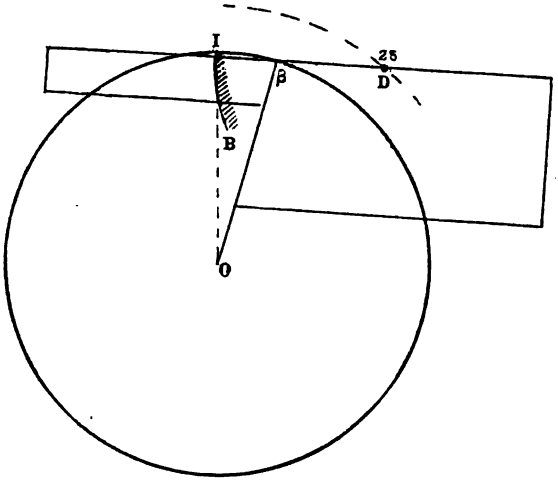


Fig. 48.

Pour un motif analogue au précédent, nous donnons à l'appareil la disposition indiquée par la figure 48 de telle façon que le flanc à tracer soit en contact avec la face conjuguée, sur la grande base du trapèze, un demi-pas après la ligne des centres. Son centre D coïncide alors

Digitized by Google

avec la division 25 qui correspond au chiffre 25 trouvé, dans la table relative aux centres des flancs, au point de croisement de la ligne 30 et de la colonne 3 et le segment DI mesure son rayon.

3° *Tracé épicycloïdal approché.*

Tout tracé épicycloïdal approché a pour but de remplacer le profil IM_2B_2 de la face d'une dent de la roue O_2 par un arc de circonférence qui contient le point I, le point M_2 correspondant aux $\frac{2}{3}$ de la saillie

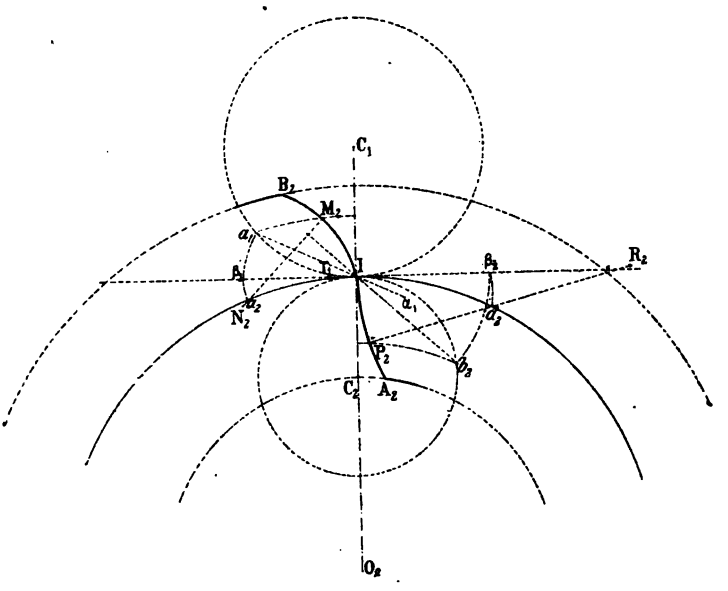


Fig. 49.

et qui de plus lui est tangent en ce dernier point; une substitution analogue permet de remplacer l'hypocycloïde IP_2A_2, profil de son flanc, par un second arc de circonférence.

Le tracé de l'épicycloïde rappelé § 23 nous permet d'obtenir la position du point M_2. Il suffit de décrire du point O_2 comme centre avec un rayon égal à $R_2 + \frac{2m}{3}$, m désignant la saillie de la dent, un arc de circonférence et de prendre le point a_1 à gauche de la ligne des centres où il vient couper la roulette C_1; de porter ensuite sur la circonférence primitive O_2 un arc $\widehat{Ia_2}$ égal à l'arc $\widehat{Ia_1}$ et de décrire de son extrémité a_2 comme centre avec un rayon égal à la corde Ia_1 un second arc de circonférence qui vient couper le premier au point M_2 cherché.

Digitized by Google

Le point de rencontre N_2 de la normale M_2a_2 à l'épicycloïde au point M_2 avec la perpendiculaire à la corde IM_2 en son milieu coïncide avec le centre de la circonférence cherchée.

Le point α_2 se détermine rapidement comme suit : Au delà du point I, nous prolongeons la corde Ia_1 d'une longueur égale à sa moitié et du point α_1 obtenu, avec α_1a_1 pour rayon, nous décrirons un arc de circonférence qui détermine sur la tangente commune aux deux circonférences primitives un point β_1 ; puis du point γ_1 situé au quart du segment $I\beta_1$ avec $\gamma_1\beta_1$ pour rayon nous décrivons un second arc de circonférence qui vient couper la circonférence primitive O_2 au point a_2 cherché.

Des constructions identiques, indiquées sur la figure, nous permettant d'obtenir le centre R_2 de l'arc de cercle flanc des dents de la roue O_2.

4° *Tracé à développantes approché.*

Tout tracé approché par développantes a pour but de substituer, à un arc (B_2C_2) de développante de cercle, un cercle qui passe par son origine B_2, par le point M_2 situé aux $\frac{2}{3}$ de la saillie et qui lui est tangent en ce point. Son centre se trouve donc sur la tangente M_2a_2 au cercle développé en un point N_2 tel que :

$$N_2a_2 = \frac{a_2M_2}{4}.$$

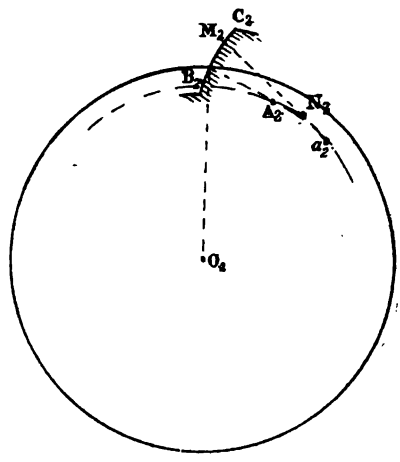


Fig. 50.

La construction qui permet de porter sur une circonférence une longueur égale à un segment de droite justifie ce choix.

5° *Procédé de M. Lecornu.*

La question de la substitution des profils circulaires aux profils vrais fut l'objet des recherches de M. Lecornu ; en se plaçant au point de vue le plus général, il a recherché quelle disposition il fallait donner à deux profils circulaires, invariablement liés à deux circonférences pri-

Digitized by Google

mitives, pour que le rapport des vitesses angulaires des roues correspondantes soit constant.

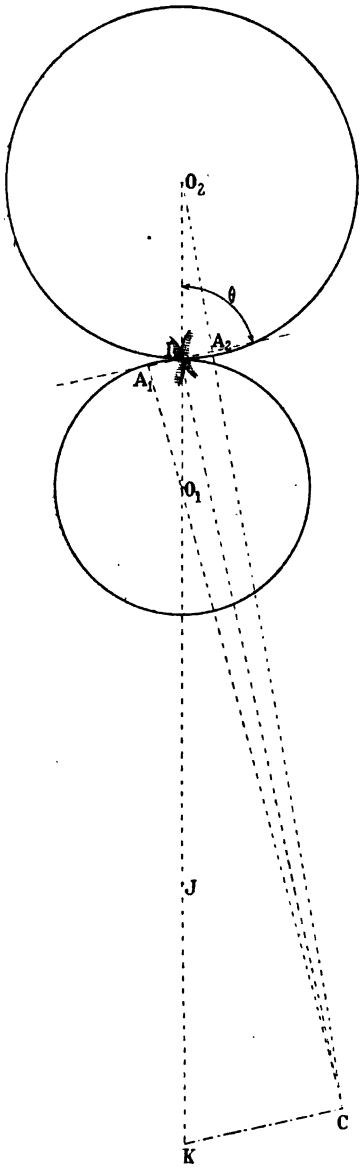


Fig. 51.

De sa théorie qui exige des connaissances mathématiques trop élevées pour les élèves auxquels s'adresse ce cours, nous ferons simplement connaître le point de départ à la portée de tous et les résultats obtenus.

Comme pendant le travail de deux dents, la distance A_1A_2 de leurs centres reste constante, nous pouvons regarder la transmission du mouvement de rotation entre les deux arbres O_1 et O_2 comme analogue à celle réalisée par un système bielle et manivelles. Si donc, à un instant quelconque, nous désignons par P le point de rencontre de la bielle et ligne des centres O_1O_2, nous pouvons écrire d'après un résultat établi en cinématique théorique § **144** :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{PO_2}{PO_1}$$

Il en résulte que le système pour lequel le rapport $\frac{PO_2}{PO_1}$ varie infiniment peu permet de résoudre le problème posé.

En partant de cette idée, et dirigeant convenablement les calculs, on est conduit à déterminer comme suit le point appelé C dans la théorie générale de l'engrenage Willis à un arc de cercle : On marque sur la ligne des centres le point J conjugué harmonique du point I par rapport aux deux centres O_1 et O_2 et l'on prolonge le segment IJ d'une longueur JK égale à sa moitié; puis l'on détermine la projection orthogonale du point K ainsi défini

Digitized by Google

sur la droite IC et l'on obtient ainsi le point C cherché. Comme précédemment, il permet d'obtenir les centres A_1 et A_2 des profils cherchés, fig. 51.

La formule qui permet d'étudier les variations du rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est la suivante :

$$\frac{\delta\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\frac{\omega_1}{\omega_2}} = \frac{(2Z_1 + Z_2)(2Z_2 + Z_1)(Z_1 + Z_2)}{18Z^3_1 Z^3_2}\pi^3 \operatorname{tg}\theta,$$

où Z_1 et Z_2 désignent les nombres de dents de chacune des roues. Si nous l'appliquons au cas où $\theta = 72°$, $Z_1 = 60$, $Z_2 = 30$, elle donne :

$$\frac{\delta\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\frac{\omega_1}{\omega_2}} = 0{,}0015,$$

et montre que les variations du rapport des vitesses angulaires sont négligeables.

30. Avantages et inconvénients des tracés rigoureux qui permettent l'établissement des roues d'assortiment.

a) **Forme des dents.** — Au point de vue de la résistance de la dent, le profil à développante est supérieur au profil épicycloïdal puisqu'il se rapproche davantage de la forme parabolique du profil d'égale résistance. De plus, étant à simple courbure, la construction des fraises qui en dérivent et qui sont nécessaires au taillage des dents est moins pénible que celle qui correspond au profil épicycloïdal à double courbure.

b) **Rendement.** — La transmission de mouvement la plus avantageuse au point de vue du rendement est celle qui correspond au travail minimum de frottement des dents en contact. En désignant par Z_1 et Z_2 les nombres de dents des deux roues, par f le coefficient de frottement qui leur correspond, par P le travail absorbé, et combinant les résultats trouvés §§ 23 et 25 avec d'autres qu'on établira en mécanique, nous pouvons écrire :

$$P = \pi f\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)\frac{n}{2},$$

pour les dentures à profils épicycloïdaux ; et,

$$P = \pi f\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)\frac{n}{3}$$

pour les dentures à développantes.

Digitized by Google

Une transmission à dentures épicycloïdales est donc plus avantageuse qu'une à développantes.

c) **Frottement des arbres sur les paliers.** — Le frottement des arbres sur les paliers, constant dans le cas d'engrenages à profils à développantes, est variable dans celui d'engrenages à profils épicycloïdaux. Les vibrations des arbres sont donc moins à redouter avec les dentures à développantes.

d) **Distance des arbres.** — La denture à développantes a dans ce cas encore la supériorité, car elle fonctionne toujours normalement malgré une petite variation dans la distance des arbres.

e) Pour ces différentes raisons, les constructeurs donnent aujourd'hui une préférence marquée à la denture à développantes.

Digitized by Google

CHAPITRE III

—

NOTATION NOUVELLE DU PAS DES ENGRENAGES

31. Pas diamétral. — Les différents tracés en usage donnent à la saillie des dents évaluée suivant le rayon qui passe par le milieu de l'épaisseur une moyenne de proportions qui correspond au nombre $0{,}31p$, p désignant le *pas circonférentiel*. Il correspond approximativement à la fraction $\frac{p}{\pi}$ à laquelle nous donnons le nom de *module* ou *pas diamétral* et que nous désignons par la lettre m.

Théoriquement, la longueur de la tête d'une dent doit être égale à la longueur de son pied, en sorte qu'à chacune d'elles doit correspondre le nombre m. Pratiquement, nous ajoutons à la longueur du pied l'excédent $\frac{16}{10}m$ pour obtenir un certain jeu, et comme il n'a aucune influence sur la ligne d'action, nous pouvons n'en pas tenir compte dans les calculs qui vont suivre.

Ceci posé, désignons par Z le nombre de dents d'une roue, par D_p, D_{ef}, D_{ev}, les diamètres des circonférences primitive, d'échanfrinement et d'évidement des dents. Les considérations qui précèdent et les calculs faits antérieurement § 10, nous permettent d'écrire :

$$D_{ev} = m(Z - 2)$$
$$D_p = mZ$$
$$D_{ef} = m(Z + 2).$$

Les tracés des roues d'assortiment se font comme par le passé ; la différence essentielle qui existe entre les deux procédés réside dans la détermination des circonférences d'échanfrinement et d'évidement des roues. Dans le premier cas, on la fait dépendre des arcs d'approche et de retraite ; dans le second cas, ce sont au contraire ces arcs qui dépendent des circonférences elles-mêmes.

Problème. — *Dans un tracé au pas diamétral et à profils épicycloïdaux, calculer les arcs d'approche et de retraite.*

Digitized by Google

Soient O_2 (fig. 23) la roue menante dans le sens de la flèche f_2, O_1 la roue menée, Z_2 et Z_1 leurs nombres de dents.

La circonférence d'échanfrinement des dents de la roue O_2 détermine sur la roulette C_1 un point P_2 et l'arc $\widehat{IP_2}$ correspond à l'arc de retraite r que nous nous proposons d'évaluer.

A cet effet, désignons par α l'angle P_2C_1I et considérons le triangle $P_2C_1O_2$, il nous donne :

$$m = \sqrt{\left(\frac{mZ_2}{2} + \rho_1\right)^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\left(\frac{mZ_2}{2} + \rho_1\right)\cos\alpha} - \frac{mZ_2}{2}.$$

Or, comme l'angle α est assez petit, il est au maximum de 30°, nous pouvons remplacer $\cos\alpha$ par les deux premiers termes de son développement en série. Nous obtenons alors :

$$m = \sqrt{\left(\frac{mZ_2}{2} + \rho_1\right)^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\left(\frac{mZ_2}{2} + \rho_1\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)} - \frac{mZ_2}{2},$$

ou, en effectuant les calculs :

$$m = \frac{mZ_2}{2}\sqrt{1 + \frac{\rho_1^2\alpha^2\left(\frac{mZ_2}{2\rho_1} + 1\right)}{\frac{m^2Z_2^2}{4}}} - \frac{mZ_2}{2}.$$

Or :

$$r = \alpha\rho_1.$$

Par suite :

$$m = \frac{mZ_2}{2}\sqrt{1 + \frac{2r^2}{mZ_2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{2}{mZ_2}\right)} - \frac{mZ_2}{2}.$$

Si nous développons le radical par la formule du binôme et si nous nous bornons aux deux premiers termes de son développement, l'expression précédente devient finalement :

$$m = \frac{mZ_2}{2}\left[1 + \frac{r^2}{mZ_2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{2}{mZ_2}\right)\right] - \frac{mZ_2}{2}.$$

Résolue par rapport à r^2 elle nous donne :

$$r^2 = \frac{2m}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{2}{mZ_2}}.$$

Par analogie, nous pouvons alors écrire :

$$a^2 = \frac{2m}{\frac{1}{\rho_2} + \frac{2}{mZ_1}}.$$

Digitized by Google

32. Application. — *Faisons une application du calcul précédent au cas d'un engrenage à profils épicycloïdaux mais à flancs rectilignes pour lequel* $Z_1 = 20$, $Z_2 = 60$.

Les flancs des dents étant rectilignes, il en résulte que :

$$\rho_1 = \frac{mZ_1}{4}, \qquad \rho_2 = \frac{mZ_2}{4}.$$

Les expressions générales de a^2 et r^2 deviennent alors :

$$a^2 = \frac{m^2 Z_1 Z_2}{2Z_1 + Z_2},$$

$$r^2 = \frac{m^2 Z_1 Z_2}{2Z_2 + Z_1}.$$

Si nous remplaçons Z_1 et Z_2 par leurs valeurs et m par $0{,}3p$, nous obtenons :

$$a = 1{,}038p,$$
$$r = 0{,}876p.$$

Leur somme ou de l'arc de conduite vaut donc : $1{,}914p$. Comme elle est supérieure à un pas, l'engrenage fonctionne dans de bonnes conditions.

33. Minimum de dents du plus petit pignon d'une série. — Pour fixer les idées, nous admettrons que le plus petit pignon de la série considérée a des flancs rectilignes. Dans ces conditions le rayon ρ commun aux roulettes a pour expression :

$$\rho = \frac{mZ_1}{4}.$$

Les valeurs des arcs d'approche et de retraite pour les deux roues de la série qui ont respectivement Z'_1 et Z'_2 dents sont alors :

$$a'^2 = \frac{m}{\frac{2}{mZ_1} + \frac{1}{mZ'_1}},$$

$$r'^2 = \frac{m}{\frac{2}{mZ_1} + \frac{1}{mZ'_2}}.$$

Comme le minimum de a' a lieu en même temps que celui de Z'_1 c'est-à-dire pour $Z'_1 = Z_1$ et que celui de r' correspond à la relation $Z'_2 = Z_1$, l'arc de conduite est minimum quand le plus petit pignon de la série engrène avec lui-même. Les valeurs de a' et r' sont alors :

$$a'^2 = r'^2 = \frac{m^2 Z_1}{3},$$

Digitized by Google

et celle de l'arc de conduite :

$$2m\sqrt{\frac{Z_1}{3}}.$$

Si donc :

$$2m\sqrt{\frac{Z_1}{3}} \geqslant p,$$

il y a engrènement pour toutes les roues de la série, et comme $m = 0{,}3p$, l'inégalité précédente peut s'écrire :

$$Z_1 \geqslant 8{,}33.$$

Le nombre minimum de dents du plus petit pignon de la série est donc neuf.

34. Influence de l'obliquité de la ligne d'engrènement dans les engrenages à développantes (Extrait du mémoire publié en 1903 dans la *Revue de mécanique* par M. Edmond Dubosc). — Soient O_1 et O_2 (fig. 52) les deux circonférences primitives de l'engrenage, θ l'inclinaison de la ligne d'engrènement sur la ligne des centres O_1O_2, D_b le diamètre de la circonférence de base de la développante profil des dents de la roue O_1. D_{ev} celui de la circonférence d'évidement.

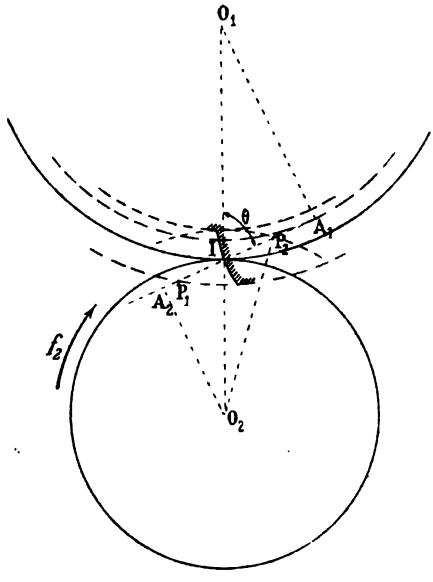


Fig. 52.

Comme le triangle IO_1A_1 donne :

$$D_b = D_p \sin\theta,$$

ou : $$D_b = mZ\sin\theta$$

si l'inégalité :

$$D_b > D_{ev}$$

ou son équivalente :

$$mZ\sin\theta > m(Z-2)$$

est satisfaite, la circonférence de base de la développante sera extérieure à la circonférence d'évidement.

Résolue par rapport à Z, elle donne :

$$Z < \frac{2}{1-\sin\theta}$$

Digitized by Google

et comme en général θ vaut 75° et que par suite $\frac{1}{1-\sin\theta} = 59$, il en résulte que dans une série d'assortiment la condition précédente est satisfaite pour toute roue dont le nombre de dents est inférieur à 59.

Ceci posé, considérons dans une telle série l'engrènement d'une crémaillère avec un pignon dont le nombre de dents est inférieur à 59.

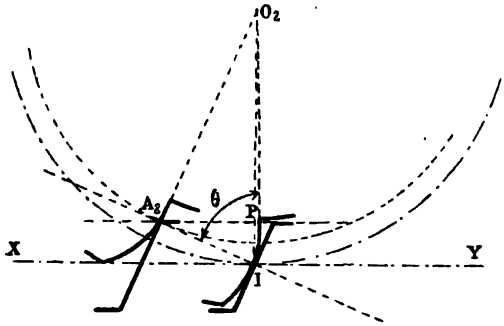


Fig. 53.

Le profil des dents du pignon s'arrêtant à la circonférence de base de la développante est nécessairement incomplet et d'après le tracé en usage nous devons le raccorder à la circonférence d'évidement par un trait rectiligne dirigé suivant le rayon qui passe par le point de naissance de la développante. Ce prolongement empirique, tant qu'il n'entre pas en contact, ne modifie en rien la manière dont fonctionne l'engrenage; mais, dès qu'il intervient dans la conduite, le rapport des vitesses angulaires des deux arbres n'est plus constant et il se produit un phénomène désigné par les Anglais sous le nom d'*interférence*: la dent de la crémaillère coupe celle du pignon.

Tout d'abord (fig. 53), si l'extrémité de la face de la crémaillère se trouve en contact en A_2 avec le flanc du pignon, les deux dents se quittent en ce point et il n'y a pas interférence. La ligne d'échanfrinement de la crémaillère passe alors par le point A_2 et coupe le rayon O_2I en un point P satisfaisant à la relation :

$$O_2P = O_2A_2 \sin\theta,$$

ou :

$$m(Z-2) = mZ\sin^2\theta,$$

De laquelle nous déduisons :

$$Z = \frac{2}{\cos^2\theta}.$$

Comme $\theta = 75°$, $\frac{2}{\cos^2\theta} = 30$. Il en résulte que pour tous les pignons

Digitized by Google

qui engrènent avec la crémaillère et qui ont moins de 30 dents il y a *phénomène d'interférence.*

35. Calcul de l'interférence. — Considérons les deux roues au moment où les dents considérées sont en contact au point A_2 ; puis figurons les positions qu'elles occupent (fig. 54) lorsque le pignon a tourné

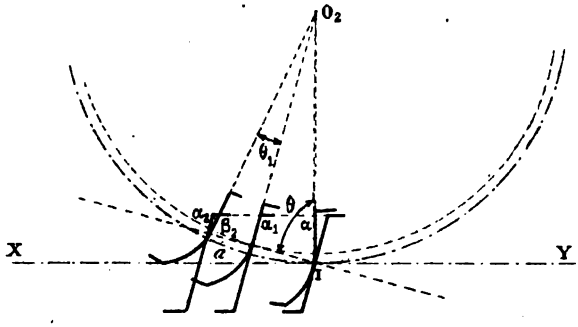


Fig. 54.

d'un angle θ_1 interceptant sur sa circonférence primitive un arc égal à a. Leurs profils viennent couper la ligne d'échanfrinement de la crémaillère aux points β_2 et α_2 et tant que l'inégalité :

$$\alpha\alpha_2 - \alpha\beta_2 > 0$$

est satisfaite, l'interférence se produit.

Or, le triangle $O_2\alpha\alpha_1$ donnant pour $\alpha\alpha_1$ l'expression :

$$\alpha\alpha_1 = \frac{m(Z_2 - 2)}{2} \operatorname{cotg} \theta,$$

nous en déduisons :

$$\alpha\alpha_2 = \frac{m(Z_2 - 2)}{2} \operatorname{cotg} \theta + a.$$

D'autre part, l'angle de rotation θ_1 qui intercepte sur la circonférence primitive du pignon l'arc a a pour expression :

$$\theta_1 = \frac{2a}{mZ_2},$$

et le triangle $O_2\alpha\beta_2$ donne :

$$\alpha\beta_2 = \frac{m(Z_2 - 2)}{2} \operatorname{cotg}\left(\theta - \frac{2a}{mZ_2}\right).$$

L'inégalité à vérifier peut donc s'écrire :

$$\frac{m(Z_2 - 2)}{2}\left[\operatorname{cotg}\theta - \operatorname{cotg}\left(\theta - \frac{2a}{mZ_2}\right)\right] + a > 0.$$

Digitized by Google

Si, comme précédemment, nous donnons à θ la valeur 75° et à Z_2 des valeurs décroissantes inférieures à 30, nous constatons que l'inégalité est satisfaite pour des valeurs de a de plus en plus grandes ; il y a donc aggravation du phénomène d'interférence. Toutefois, comme en pratique la dent de la crémaillère se termine par un arrondi dont nous pouvons supposer le rayon égal à $\frac{m}{20}$, nous pouvons descendre jusqu'au pignon de 20 dents sans qu'il y ait interférence.

Dans le cas où $\theta = 67° 1/2$, nous pouvons même descendre jusqu'au pignon de neuf dents.

36. Nombre de dents en contact. — Les circonférences d'échanfrinement des dents des deux roues coupant la ligne d'action en des points P_1 et P (fig. 52), les arcs d'approche a et de retraite r ont pour expressions :

$$a = \frac{IP_1}{\sin\theta}, \qquad r = \frac{IP_2}{\sin\theta}.$$

Or, si nous considérons le triangle O_2IP_2, il nous donne :

$$\frac{\frac{mZ_2}{2}}{\sin P_2} = \frac{\frac{m(Z_2+2)}{2}}{\sin\theta} = \frac{IP_2}{\sin(\theta - P_2)},$$

ou bien encore :

$$\sin P_2 = \frac{Z_2}{Z_2+2}\sin\theta.$$

De cette équation, nous déduisons :

$$\widehat{P_2} = \arcsin\left[\frac{Z_2}{Z_2+2}\sin\theta\right],$$

et par suite :

$$IP_2 = \frac{m(Z_2+2)}{2\sin\theta}\cdot\sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{Z_2}{Z_2+2}\sin\theta\right)\right].$$

Par analogie :

$$IP_1 = \frac{m(Z_1+2)}{2\sin\theta}\sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{Z_1}{Z_1+2}\sin\theta\right)\right].$$

L'expression de l'arc de conduite est donc :

$$\frac{m}{2\sin^2\theta}\left[(Z_1+2)\sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{Z_1}{Z_1+2}\sin\theta\right)\right] + (Z_2+2)\sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{Z_2}{Z_2+2}\sin\theta\right)\right]\right].$$

Digitized by Google

Elle est évaluée en fonction du module m ; pour l'obtenir en fonction du pas circonférentiel, il suffit d'y remplacer m par $\frac{p}{\pi}$; elle devient alors :

$$\frac{p}{2\pi \sin^2 \theta}\left[(Z_1+2)\sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{Z_1}{Z_1+2}\sin\theta\right)\right] + (Z_2+2)\sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{Z_2}{Z_2+2}\sin\theta\right)\right]\right].$$

Cette formule permet de calculer, pour une obliquité donnée et pour des valeurs connues de Z_1 et Z_2, le nombre de dents en contact. Elle conduit aux résultats suivants : pour l'obliquité de 67° 1/2, la transmission de mouvement s'effectue dans de bonnes conditions jusqu'au pignon de onze dents ; pour celle de 75°, nous ne pouvons aller que jusqu'aux pignons de vingt dents.

Comme en pratique, on utilise fréquemment les pignons ayant un petit nombre de dents, il résulte de ce qui précède que nous pouvons les obtenir, sans craindre l'interférence, en donnant à l'angle θ la valeur de 67° 1/2.

Digitized by Google

CHAPITRE IV

—

THÉORIE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES INTÉRIEURS

37. Problème général. — *Transformer le mouvement de rotation d'un arbre* O_1 *en un mouvement de rotation de même sens autour d'un arbre* O_2 *parallèle au premier par l'intermédiaire de deux corps* A_1 *et* A_2 *respectivement calés sur les deux arbres et dont on déterminera la nature en s'imposant que le rapport* $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *des vitesses angulaires soit constant et que les vitesses relatives de glissement des points de contact de l'un des corps par rapport à l'autre soient aussi petites que possible.*

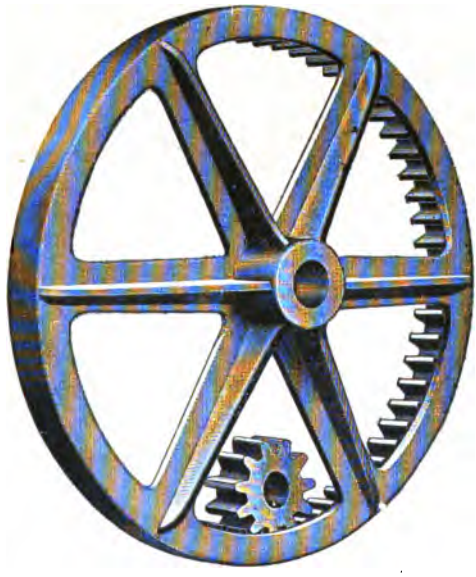


Fig. 55.

Un raisonnement identique à celui que nous avons fait § 201, montre que les deux corps A_1 et A_2 sont deux cylindres intérieurs de révolution, d'axes O_1 et O_2, en contact suivant une génératrice projetée en I sur le plan de la figure et dont les rayons $IO_1 = R_1$, $IO_2 = R_2$ sont liés aux vitesses angulaires de rotation ω_1 et ω_2 par la relation :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Digitized by Google

Comme ces roues intérieures doivent être armées de dents, la détermination de leurs profils repose sur les considérations développées § 12 puisque dans ce cas encore le mouvement relatif de l'une des roues par rapport à l'autre est un roulement.

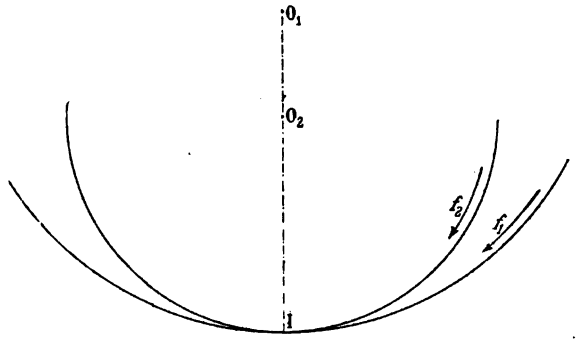


Fig. 56.

SOLUTION INDIRECTE. — Sur les deux arbres O_1 et O_2, calons deux roues de rayons R_1 et R_2 et faisons-les engréner extérieurement avec une troisième de rayon R calée sur un arbre O parallèle aux deux premiers. Si la flèche f_1 désigne le sens de rotation de l'arbre O_1, d'après la théorie des engrenages cylindriques extérieurs, ceux des arbres O et O_2 correspondent aux flèches f et f_2 et leurs vitesses angulaires ω_1, ω_2, ω sont liées aux rayons par les relations :

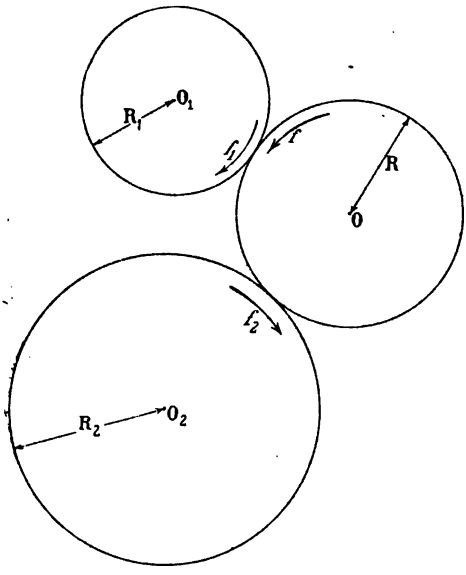


Fig. 57.

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{R}{R_1}$$

$$\frac{\omega}{\omega_2} = \frac{R_2}{R},$$

qui, multipliées membre à membre, conduisent à la suivante :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Les deux roues O_1 et O_2 tournent donc bien dans le même sens avec

Digitized by Google

un rapport de vitesses angulaires constant et comme d'autre part les vitesses relatives de glissement des points de contact des cylindres O_1 et O_2 avec le cylindre O sont nulles, toutes les hypothèses de l'énoncé sont satisfaites.

Remarque. — Tous les engrenages intérieurs présentent un même inconvénient : la grande roue a la forme d'une couronne complètement évidée et se trouve placée en porte-à-faux sur son arbre, ce qui la rend très sujette aux trépidations et compromet sa solidité. C'est pourquoi le plus souvent, on évite un pareil engrenage en lui substituant trois roues extérieures (fig. 57).

38. Denture épicycloïdale.

α) **Recherche des profils.** — Soient (fig. 58) O_1 et O_2 les centres des circonférences primitives, C_1 et C_2 deux roulettes de rayons ρ_1 et ρ_2, tangentes au point I et choisies de telle façon que ρ_2 soit plus petit que R_2. Le point I de la roulette C_1 roulant sur chacune des circonférences primitives à gauche de la ligne des centres O_1O_2 décrit successivement deux arcs IB_1 et IA_2 d'épicycloïdes ; considéré comme appartenant à la roulette C_2 roulant à droite de la ligne des centres sur les mêmes circonférences, il décrit deux arcs IA_1, IB_2 d'hypocycloïdes et les deux courbes A_1IB_1, A_2IB_2 sont les profils cherchés des dents des deux roues.

β) **Circonférences d'échanfrinement et d'évidement des dents.** — La roue O_1 étant supposée menante conduit dans le sens de la flèche f_1. Si donc nous portons en approche sur la roulette C_1, à partir du point I, un arc égal à l'arc d'approche, nous déterminons le premier point P_2 de la ligne d'action ; il appartient par suite au cercle d'échanfrinement des dents de la roue menée O_2. Si nous portons de même en retraite, sur la roulette C_2, à partir du point I, un arc égal à l'arc de retraite, nous obtenons le dernier point P_1 de la ligne d'action ; il appartient par suite au cercle d'échanfrinement des dents de la roue O_1.

Les cercles d'évidement se déduisent des précédents par l'intermédiaire du jeu.

39. Denture épicycloïdale a flancs rectilignes.

α) **Recherche des profils.** — Les flancs des dents devant être rectilignes, les diamètres des roulettes C_1 et C_2 sont respectivement égaux aux rayons des circonférences primitives correspondantes.

Digitized by Google

Comme précédemment, en faisant rouler successivement chacune d'elles sur ces circonférences, le point I engendre les profils A_1IB_1, A_2IB_2 des

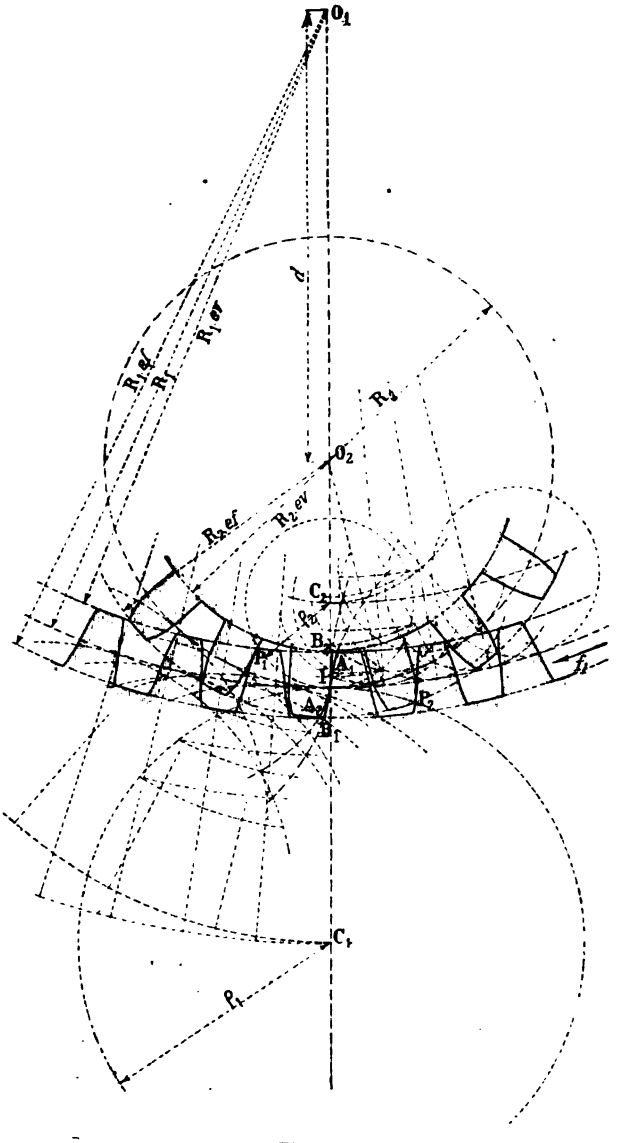


Fig. 58.

dents de la roue et du pignon. La disposition du premier qui veut que sa face IA_1 et son flanc IB_2 soient d'un même côté de la circonférence primitive oblige le praticien, comme nous allons l'établir, à

Digitized by Google

supprimer le flanc des dents de la roue et par suite la face des dents du pignon.

Pour fixer les idées, supposons en effet que la roue O_1 soit menante ; elle conduit alors dans le sens de la flèche f_1 (fig. 59) et à un certain moment, en approche, le contact du flanc de l'une de ses dents avec la face conjuguée se fait en un certain point P de la roulette C_1.

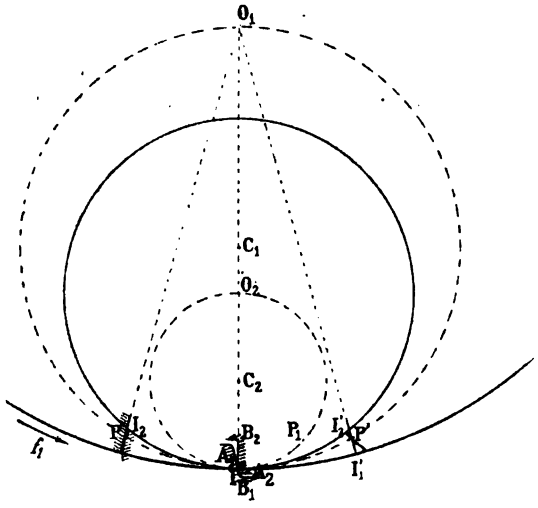


Fig. 59.

Ceci posé, faisons tourner la roue O_1 de manière que son flanc vienne occuper la position I'_1P' symétrique de la première par rapport à la ligne des centres et recherchons la position correspondante de la face des dents du pignon. Elle doit couper la circonférence primitive O_2 en un point I'_2 satisfaisant à la relation :

$$\widehat{II'_2} = \widehat{II'_1}.$$

Mais comme :

$$\widehat{II'_1} = \widehat{II_2},$$

elle peut s'écrire :

$$\widehat{II'_2} = \widehat{II_2},$$

et montre que le point cherché est symétrique du point I_2 par rapport à la ligne des centres. Comme d'autre part :

$$\widehat{II_2} = \widehat{IP}$$

et :

$$\widehat{IP} = \widehat{IP'},$$

nous en concluons que :

$$\widehat{II'_2} = \widehat{IP'}$$

Digitized by Google

et la courbe I'_2P' occupe bien la disposition que nous lui avons donnée

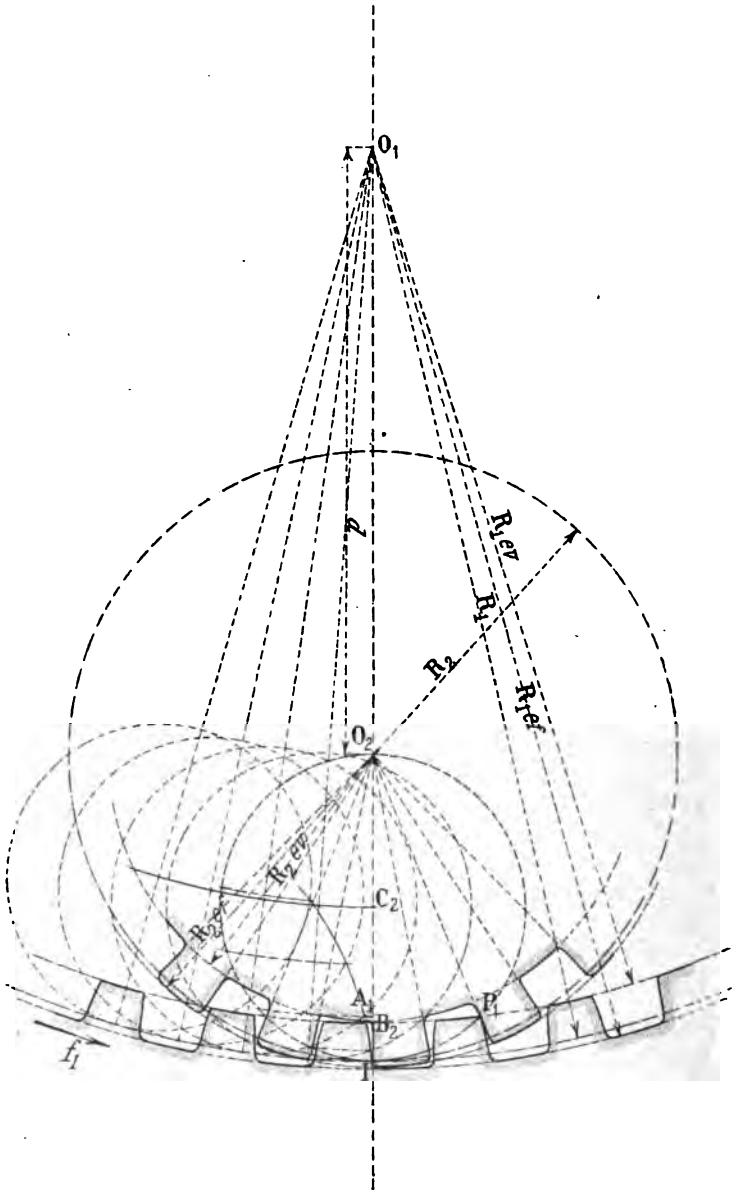


Fig. 60.

sur la figure. Flanc et face considérés se coupent donc et comme il est impossible qu'un engrenage fonctionne dans de semblables conditions,

Digitized by Google

nous sommes conduits à les supprimer. La conduite de l'engrenage se fait donc seulement en retraite.

Dans le cas où le centre O_1 de la roue se trouve à l'intérieur de la circonférence primitive du pignon, le profil du pignon se trouve lui aussi tout entier d'un même côté de la circonférence primitive correspondante et si nous voulons éviter le phénomène d'arc-boutement plus à craindre en approche qu'en retraite, nous sommes conduits à faire les mêmes suppressions que précédemment.

β) **Cercles d'échanfrinement et d'évidement des dents.** — Le contact des dents se faisant en retraite seulement, si nous portons en retraite sur la roulette C_2 (fig. 60), à partir du point I, un arc IP_1 égal à l'arc de retraite, nous obtenons le dernier point P_1 de la ligne d'action. Il appartient à la circonférence d'échanfrinement des dents de la roue O_1 et nous permet d'obtenir, par l'intermédiaire du jeu, celle d'évidement des dents du pignon.

En nous limitant à ces deux circonférences, la dent du pignon se termine par un angle vif et la pratique ne l'accepte pas. C'est pourquoi nous l'arrondissons par l'addition d'un petit arc et nous l'échanfrinons ensuite par une circonférence d'un rayon un peu plus grand que celui O_2I de sa circonférence primitive.

Pour laisser passer sans coinçage cet excès de matière, nous devons tout naturellement évider la roue.

40. Denture a développantes de cercle.

α) **Recherche des profils.** — Par le point de contact I des deux circonférences primitives (fig. 61), menons une droite inclinée sur la ligne des centres d'un angle θ voisin de 75°. Les circonférences O_1A_1, O_2A_2 qui lui sont tangentes et qui ont pour centres respectifs les points O_1 et O_2 sont les bases des développantes qui vont servir de profils aux dents : Celle B_1IC_1 du cercle O_1A_1, normale au point I à la droite IA_1, correspond à celui des dents de la roue O_1 ; celle B_2IC_2 du cercle O_2A_2, normale au même point à la même droite, correspond à celui des dents de la roue O_2.

β) **Cercles d'échanfrinement et d'évidement.** — Pour fixer les idées, supposons que la roue O_1 soit menante ; elle conduit alors dans le sens de la flèche f_1.

A partir du point I, si nous portons sur la droite IA_1, en approche et en retraite des longueurs IP_2 et IP_1 égales respectivement à $a \sin \theta$ et $r \sin \theta$, a et r désignant les arcs d'approche et de retraite, nous obtien-

Digitized by Google

drons les premier et dernier points P_2 et P_1 de la ligne d'action. Ils appartiennent respectivement aux circonférences d'échanfrinement des

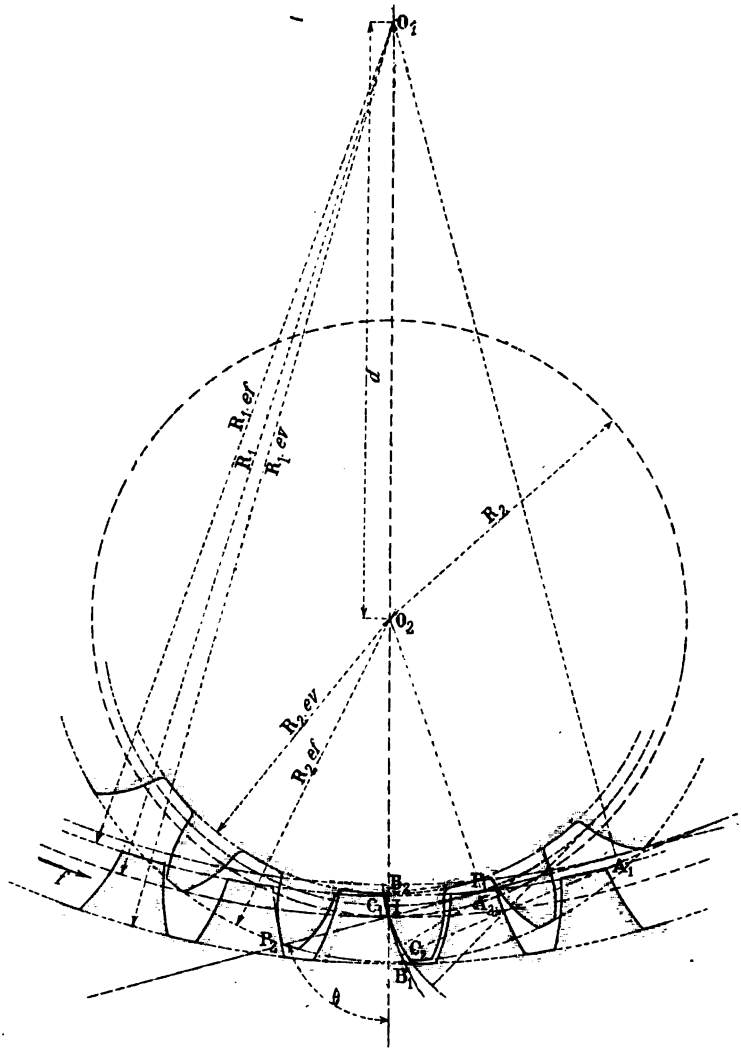


Fig. 61.

dents des roues O_2 et O_1 ; celles d'évidement s'en déduisent comme dans les cas précédents par l'intermédiaire du jeu.

γ) **Tracé d'une série.** — Les résultats établis dans le tracé au pas diamétral nous montrent qu'étant donnée une roue intérieure répondant au pas diamétral *m*, pour obtenir le rayon O_2I de la plus petite

Digitized by Google

roue extérieure capable d'engrener avec elle, il suffit (fig. 62) d'élever au point de rencontre P de la circonférence d'échanfrinement des dents de la roue et de la ligne d'action, la perpendiculaire PO_2 à cette droite jusqu'à sa rencontre en O_2 avec la ligne des centres. Un calcul analogue à celui que nous avons présenté § 10 nous permet ensuite de déterminer les nombres de dents des deux roues. En prenant, par exemple, pour abcisses les nombres de dents de la roue intérieure et pour ordonnées ceux du plus petit pignon correspondant, nous sommes conduits à la courbe indiquée sur la figure 63.

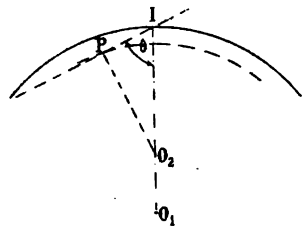


Fig. 62.

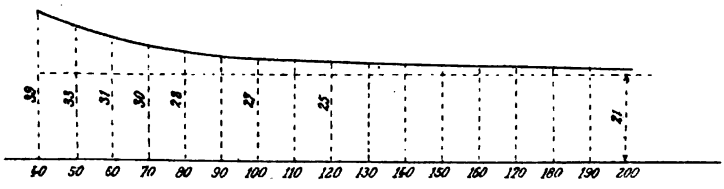


Fig. 63.

Elle permet de résoudre le même problème pour les cas intermédiaires à ceux que nous avons examinés.

41. Engrenage a lanterne.

Le tracé identique à celui que nous avons exposé § 26, est représenté

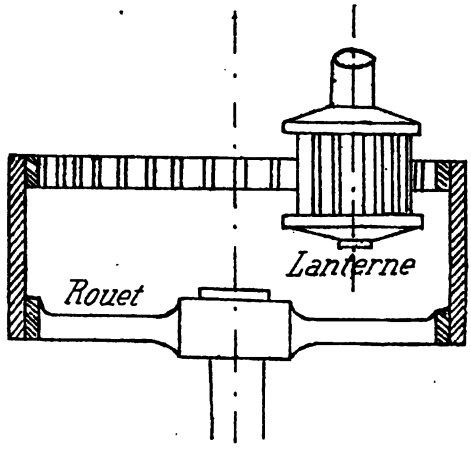


Fig. 64.

par l'épure ci-contre. Un tel engrenage est peu employé ; dans les cas

Digitized by Google

où on l'utilise, on loge les bras du rouet en dehors de la région occupée

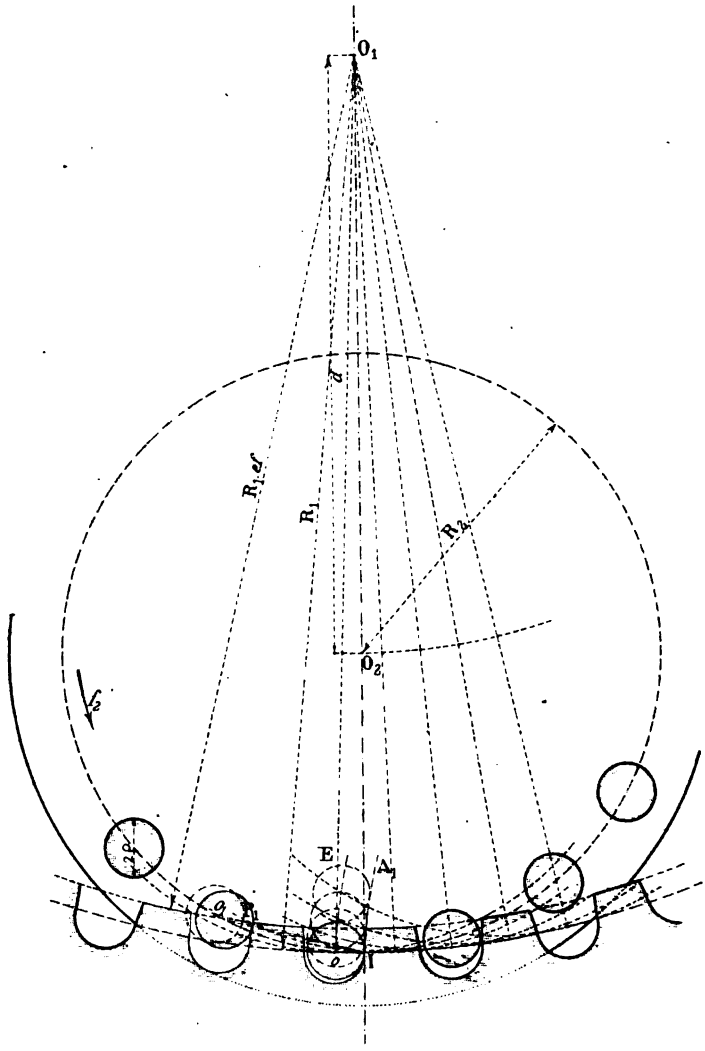


Fig. 65.

par la lanterne et l'on soutient cette dernière d'un seul côté, comme l'indique la figure 64.

42. Denture a flancs rectilignes divergents.

α) **Recherche des profils.** — Soient O_1 et O_2 les centres des cir-

Digitized by Google

conférences primitives des deux roues, R_1 et R_2 leurs rayons, I leur point de contact.

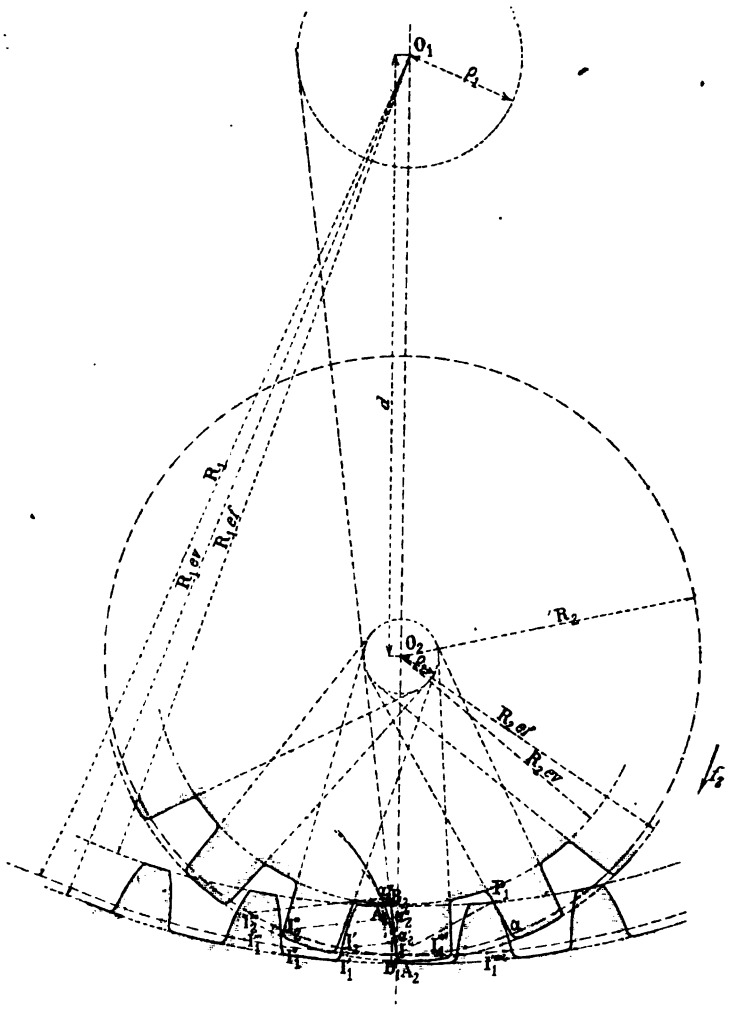


Fig. 66.

Du point O_1 comme centre, avec un rayon ρ_1 égal à environ $\frac{R_1}{6}$, décrivons une circonférence et traçons celle de centre O_2 et de rayon ρ_2 qui lui est homothétique par rapport au point I. Les flancs des dents de la roue O_1 sont tangents à la circonférence auxiliaire ρ_1 ; ceux de la roue O_2 sont également tangents à la circonférence auxiliaire ρ_2. Pour obtenir leurs faces, il nous suffit d'appliquer la construction de Poncelet. En

Digitized by Google

supposant, par exemple, que le pignon O_2 soit menant dans le sens de la flèche f_2 (fig. 66), nous prenons à gauche de la ligne des centres des points I'_2, I''_2, I'''_2, ..., sur sa circonférence primitive et leurs homologues I'_1, I''_1, I'''_1, ..., sur la circonférence primitive de la roue ; ils sont liés les uns aux autres par les relations :

$$\widehat{II'_1} = \widehat{II'_2}, \quad \widehat{II''_1} = \widehat{II''_2}, \quad \widehat{II'''_1} = \widehat{II'''_2}.$$

Puis, de ces derniers comme centres avec des rayons respectivement égaux aux normales $I'_2\alpha'_2$, $I''_2\alpha''_2$, $I'''_2\alpha'''_2$ au flanc IB_2 des dents du pignon, nous décrivons des arcs de circonférence qui ont pour enveloppe la face IA_1 des dents de la roue.

Si des points I''_1, I'''_1, ..., nous menions des normales au flanc des dents de la roue, leurs pieds seraient très voisins les uns des autres ; le contact se ferait alors sur lui sur une très petite étendue de surface et une usure rapide se produirait. Sur l'épure, nous n'avons pas admis cette usure et nous avons en conséquence supprimé le flanc des dents de la roue et la face de celles du pignon. Toutefois, pour éviter l'angle vif présenté au point I par la dent du pignon, nous l'avons échanfrinée et nous avons ensuite évidé la roue comme dans le cas de l'engrenage à flancs rectilignes convergents.

β) **Circonférences d'échanfrinement et d'évidement.** — Sur la circonférence primitive du pignon, portons de I en α un arc égal à l'arc d'approche ; puis par le point α faisons passer le flanc d'une dent et par le point I menons-lui la normale IP_1. Son pied P_1 coïncide avec le premier point de la ligne d'action et appartient par suite à la circonférence d'échanfrinement des dents de la roue ; nous en déduisons celle d'évidement des dents du pignon par l'intermédiaire du jeu.

43. Tracé Willis par un arc de cercle.

α) **Recherche des profils.** — Par le point de contact des circonférences primitives (fig. 67), menons une droite inclinée d'environ 75° sur la ligne des centres O_1O_2 ; puis des points O_1 et O_2 menons-lui des normales. Leurs pieds A_1 et A_2 coïncident avec les centres des arcs de circonférence qui vont servir de profils aux dents. Ceux en particulier qui sont en contact au point I ont pour rayons les longueurs des segments IA_1 et IA_2.

β) **Tracé d'une dent du pignon connaissant son épaisseur** $\alpha_2\beta_2$. — La circonférence de centre O_2 et de rayon O_2A_2 étant le lieu des centres des profils des dents du pignon, les points de contact

Digitized by Google

a_2 et b_2 des tangentes que nous pouvons lui mener par les points α_2 et β_2, sont les centres des circonférences profils des deux côtés de la dent.

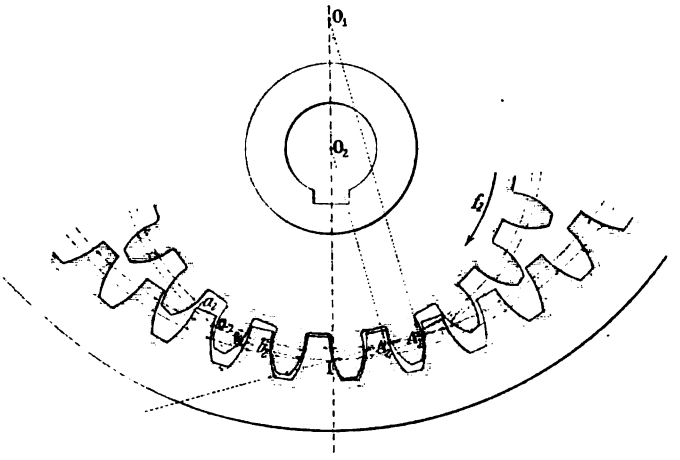


Fig. 67.

Après les avoir tracées, nous les échanfrinons par une première circonférence de rayon $R_2 + 0{,}3p$, et nous les évidons ensuite par une seconde de rayon $R_1 - 0{,}4p$, p désignant le pas de l'engrenage.

44. Tracé Willis par deux arcs de cercle.

α) **Recherche des profils.** — Par le point de contact I des circonférences primitives (fig. 68), menons une normale à la droite $I\alpha_1$ inclinée d'environ 75° sur la ligne des centres ; puis projetons sur elle en o_2 le centre O_2 du pignon et choisissons deux points C et C′ tels que :

$$IC = IC' < Io_2.$$

Joignons-les ensuite aux centres O_1 et O_2 ; les points α_1, α_2, β_1, β_2, de rencontre des droites obtenues avec la droite $I\alpha_2$, sont les centres des profils cherchés. Pour obtenir leurs rayons, admettons avec Willis qu'un demi-pas avant et un demi-pas après la ligne des centres, les profils se trouvent en contact sur la droite $I\alpha_1$. En portant alors en approche sur la circonférence primitive du pignon un arc $\widehat{ID}$ égal à $\frac{p}{2}$ nous obtiendrons en $\beta_2 D$ le rayon de la face de ses dents ; comme elle vient couper au point P la droite $I\alpha_1$, le segment $\beta_1 P$ correspond au rayon du flanc des dents de la roue. En portant de

Digitized by Google

même sur la circonférence primitive de la roue un arc IE égal à $\frac{p}{2}$, nous obtiendrons en α_1E le rayon de la face de ses dents ; comme elle vient

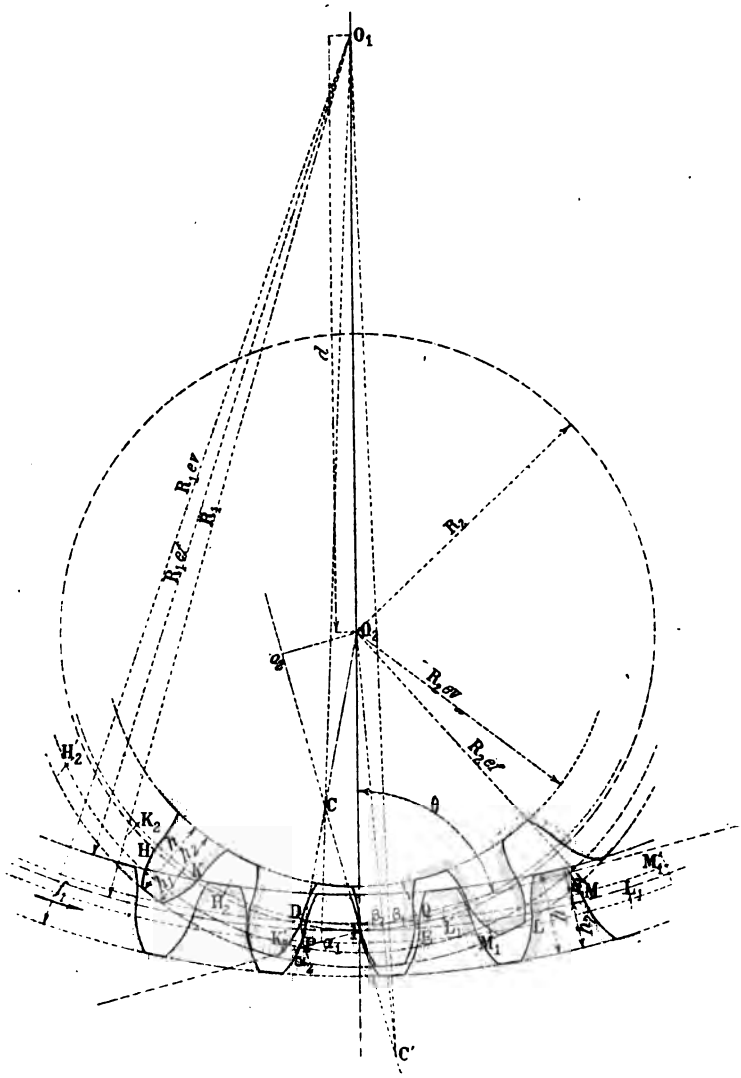


Fig. 68.

couper la ligne Iα_1 au point Q, le segment α_2Q correspond au rayon du flanc des dents du pignon.

Le tracé d'une dent connaissant son épaisseur s'effectue ensuite comme nous l'avons indiqué § 29.

Digitized by Google

CHAPITRE V

—

PIGNONS ET CRÉMAILLÈRES

45. Tracé d'une cycloïde. — L'épicycloïde se transformant en cycloïde dans le cas où la base devient une droite, les tracés des cycloïdes

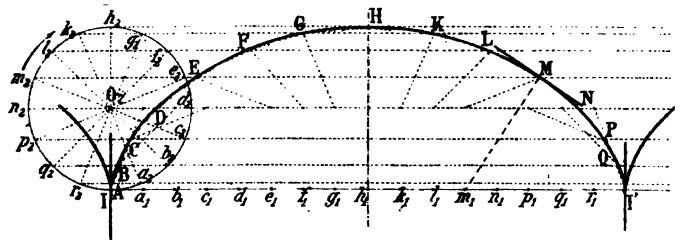


Fig. 69.

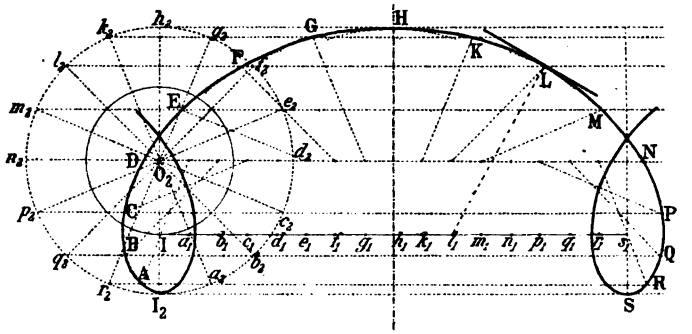


Fig. 70.

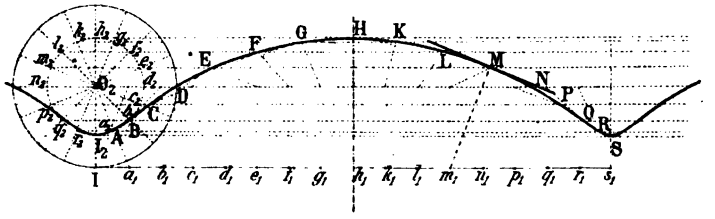


Fig. 71.

ordinaire (fig. 69), allongée (fig. 70) et raccourcie (fig. 71) se font comme nous l'avons indiqué § 23.

Digitized by Google

46. Problème général. — *Transformer, par contact immédiat, un mouvement de rotation de sens f et de vitesse angulaire ω, en un mouvement de translation qui lui est perpendiculaire et ne le rencontre pas de telle sorte qu'il existe à chaque instant un rapport constant entre leurs vitesses et que le frottement de glissement des corps en contact soit le moindre possible.*

Considérons, à cet effet, deux cylindres de friction O et O′ dont les rayons R et R′ sont liés par la relation :

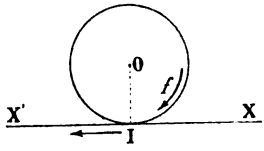


Fig. 72.

$$\omega R = \omega' R' ; \qquad (1)$$

puis imaginons que les points O et I restent fixes et que le point O′ s'éloigne à l'infini sur la ligne des centres. La roue O′ devient alors une crémaillère dont la ligne primitive XX′ (fig. 72) se réduit à une droite perpendiculaire à la ligne des centres et la rotation O′ se change en une translation perpendiculaire à la rotation O et ne la rencontrant pas. Comme d'autre part, la relation (1) est toujours vérifiée et qu'elle devient à la limite :

$$V = \omega R.$$

V désignant la vitesse de translation de la crémaillère, le problème posé se résout par pignon et crémaillère.

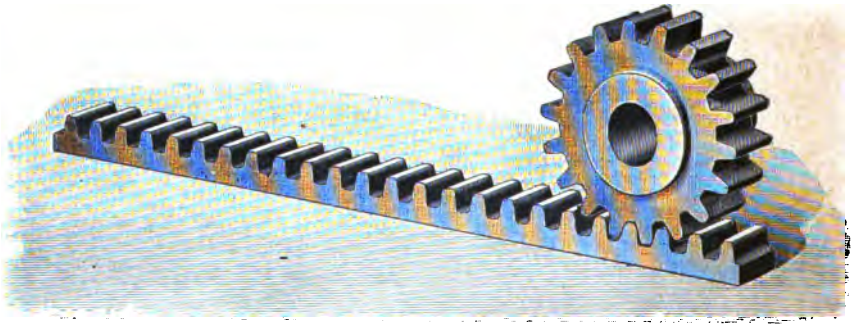


Fig. 73.

47. Denture épicycloïdale.

α) **Recherche des profils.** — Soient (fig. 74) O_1 le centre du pignon, XX′ la ligne primitive de la crémaillère, C_1 et C_2 deux roulettes de rayons ρ_1 et ρ_2 choisies de telle façon que ρ_1 soit plus petit que O_1I.

Le point I de la roulette C_1, roulant à droite de la ligne des centres

Digitized by Google

sur les lignes primitives des deux roues, décrit d'une part un arc IB_1 d'hypocycloïde qui correspond au profil des flancs des dents du pignon et d'autre part un arc IA_2 de cycloïde qui correspond à celui des faces de la crémaillère. Le même point, considéré comme appartenant à la roulette C_2 roulant sur les mêmes lignes mais à gauche de la ligne des centres, décrit aussi un arc IA_1 d'épicycloïde qui correspond au profil des faces des dents du pignon et un arc IB_2 de cycloïde qui correspond à celui des flancs des dents de la crémaillère. Il en résulte que les arcs A_1IB_1 d'épicycloïdes et A_2IB_2 de cycloïdes correspondent aux profils cherchés.

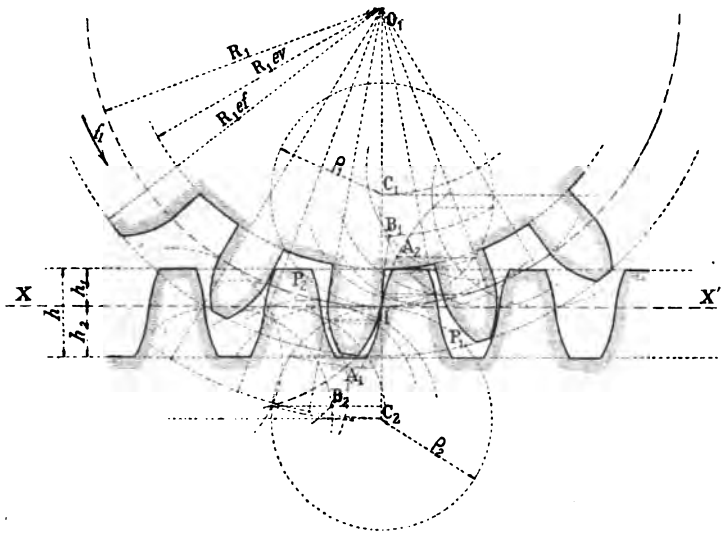


Fig. 74.

β) **Lignes d'échanfrinement et d'évidement des dents.** — Supposons que le pignon conduise ; il tourne alors dans le sens de la flèche f_1.

En portant alors en approche sur la roulette C_1, en retraite sur la roulette C_2, des arcs IP_2 et IP_1 respectivement égaux aux arcs d'approche et de retraite, nous obtenons en P_2 et P_1 les premier et dernier points de la ligne d'action. Ils appartiennent : le premier à la ligne d'échanfrinement des dents de la crémaillère, le second à la circonférence d'échanfrinement des dents du pignon ; celles d'évidement s'en déduisent par l'intermédiaire du jeu.

48. Denture épicycloïdale a flancs rectilignes.

α) **Recherche des profils.** — Comme nous l'avons établi dans

Digitized by Google

la théorie générale, dans une denture épicycloïdale à flancs rectilignes, les flancs des dents qui sont en contact au point I coïncident avec les droites qui joignent ce point aux centres des lignes primitives des deux roues et les roulettes qui nous permettent d'engendrer leurs faces sont: l'une une circonférence C_i de diamètre égal au rayon du pignon, l'autre une ligne droite confondue avec la ligne primitive XX′ de la crémaillère (fig. 75). Le point I, considéré successivement comme appartenant à chacune d'elles, décrit dans leurs roulements sur les lignes primitives des deux roues un arc IA_2 de cycloïde et un arc IA_1 de développante de cercle et les arcs de courbes A_1IB_1, A_2IB_2 correspondent aux profils cherchés.

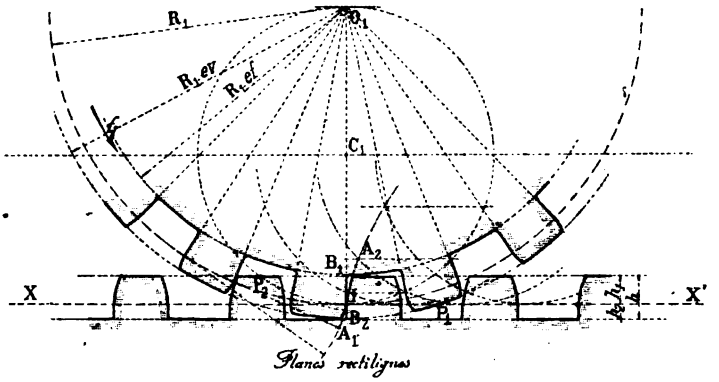


Fig. 75.

β) **Lignes d'échanfrinement et d'évidement des dents.** — Supposons que le pignon O_1 soit la roue menante; il tourne alors dans le sens de la flèche f_1.

En portant sur les roulettes les arcs IP_2, IP_1, respectivement égaux aux arcs donnés d'approche et de retraite, nous obtenons en P_2 et P_1 les premier et dernier points de la ligne d'action; le premier P_2 appartient à la ligne d'échanfrinement des dents de la crémaillère, le second P_1 à la circonférence d'échanfrinement des dents du pignon et les lignes d'évidement s'en déduisent comme dans les exemples précédents.

49. Denture a développantes de cercle.

α) **Recherche des profils.** — Par le point de contact I des deux lignes primitives (fig. 76), menons une droite inclinée sur la ligne des centres d'un angle θ voisin de 75° et traçons ensuite la circonférence de

Digitized by Google

centre O_1 et de rayon O_1P_2 qui lui est tangente. Sa développante A_1IB_1, normale au point I à la droite IP_2 correspond au profil des dents du pignon et la droite A_2IB_2 qui lui est tangente en ce même point correspond à celui des dents de la crémaillère.

β) **Lignes d'échanfrinement et d'évidement.** — Pour fixer les idées, supposons que le pignon soit la roue menante ; il tourne alors dans le sens de la flèche f_1.

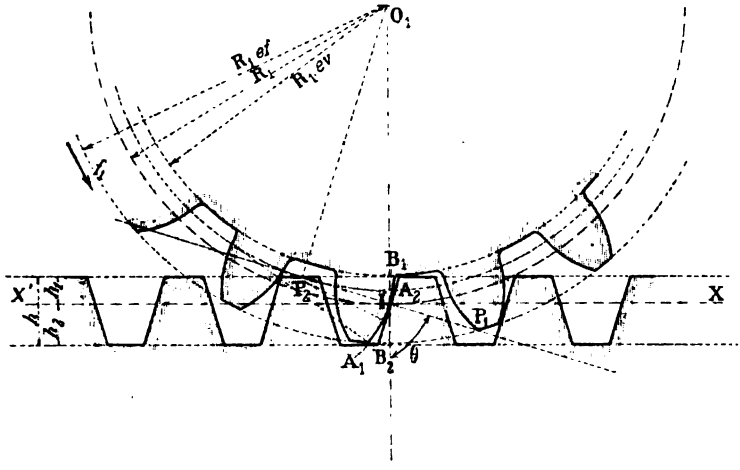


Fig. 76.

A partir du point I, sur la droite IP_2, portons en approche et en retraite des longueurs IP_2 et IP_1 respectivement égales à $a \sin \theta$ et $r \sin \theta$, a et r désignant les arcs d'approche et de retraite ; les points P_2 et P_1 ainsi déterminés correspondent aux premier et dernier points de la ligne d'action. Ils appartiennent donc : le premier à la ligne d'échanfrinement des dents de la crémaillère, le second à la circonférence d'échanfrinement des dents du pignon. Les lignes d'évidement s'en déduisent ensuite comme nous l'avons maintes fois indiqué.

50. Denture a fuseaux.

α) **Recherche des profils des dents.** — Comme, dans les exemples précédents, nous nous proposons de tracer les profils des dents de la crémaillère et du fuseau qui sont en contact au point I : celui de la crémaillère est par exemple circulaire et a pour centre le point C ; l'enveloppe des différentes positions qu'il occupe lorsque la ligne XX'

Digitized by Google

roule sur la circonférence primitive du pignon fournit celui du pignon et correspond à la développante IA_1 du cercle O_1 (fig. 77). Les dents du pignon possèdent donc des faces et la conduite de l'engrenage se fait en retraite et non en approche.

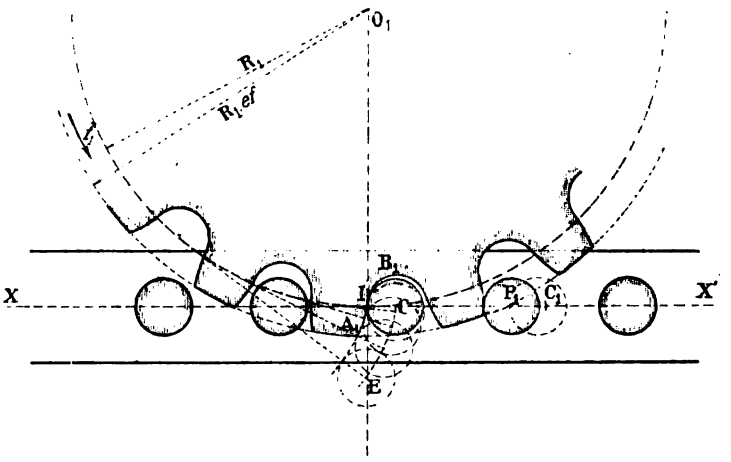


Fig. 77.

β) **Circonférence d'échanfrinement des dents du pignon.** — En portant sur la ligne primitive XX′ de la crémaillère une longueur IP_1 égale à l'arc de retraite, nous obtenons en P_1 le dernier point de la ligne d'action et par suite la circonférence d'échanfrinement O_1P_1 des dents du pignon. Quant au profil du creux, nous le déterminons par des considérations analogues à celles que nous avons indiquées § 26.

51. Denture a flancs rectilignes divergents.

α) **Recherche des profils.** — Tous les flancs des dents du pignon O_1 (fig. 78) sont tangents à une circonférence auxiliaire de centre O_1 et d'un rayon ρ_1 égal à environ $\frac{R_1}{6}$. Si, en particulier, nous le supposons menant dans le sens de la flèche f_1, les segments de droite IB_1 et IB_2 correspondent à ceux de deux dents conjuguées en contact au point I.

Pour obtenir la face de la crémaillère, nous prenons sur les lignes primitives des deux roues des points I'_1, I''_1, I'''_1 ....., I'_2, I''_2, I'''_2, ... tels que :

$$\widehat{II'_1} = \widehat{II'_2}, \quad \widehat{II''_1} = \widehat{II''_2}, \quad \widehat{II'''_1} = \widehat{II'''_2}.$$

Digitized by Google

Des premiers nous menons les normales $I'_1\alpha'_1$, $I''_1\alpha''_1$, $I'''_1\alpha'''_1$, ... au flanc IB_1 et des seconds, avec des rayons respectivement égaux aux longueurs de ces normales, nous décrivons des arcs de circonférence ; leur enveloppe fournit la face IA_2 cherchée.

Par des constructions identiques indiquées sur l'épure, nous obtenons la face IA_1 des dents du pignon.

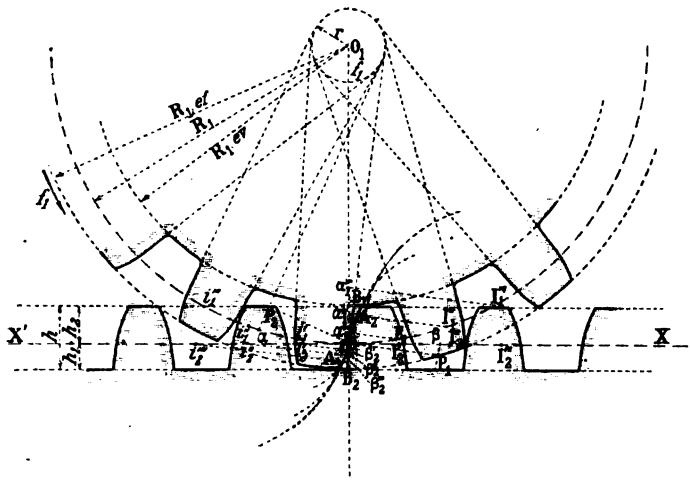


Fig. 78.

β) **Lignes d'échanfrinement et d'évidement.** — Sur la circonférence primitive du pignon, portons un arc $I\alpha$ égal à l'arc d'approche et par le point α faisons passer le flanc de l'une de ses dents. Le pied P_2 de la droite IP_2 qui lui est normale coïncidant avec le premier point de la ligne d'action appartient à la ligne d'échanfrinement des dents de la crémaillère.

En portant de même sur la ligne primitive de la crémaillère un arc $I\beta$ égal à l'arc de retraite et opérant comme précédemment, nous déterminons le dernier point P_1 de la ligne d'action ; il appartient à la ligne d'échanfrinement des dents du pignon.

52. Tracé Willis par un arc de cercle.

α) **Recherche des profils.** — Les pieds des perpendiculaires (fig. 79) abaissées des centres des lignes primitives des deux roues sur la droite IA, inclinée d'environs 75° sur la droite IO_1 coïncident avec les centres des circonférences que nous substituons aux profils rigoureux.

Digitized by Google

Celle B_1C_1 relative aux dents du pignon a donc pour centre le point A_1 et pour rayon A_1I ; l'autre se réduit à une droite B_2C_2 perpendiculaire en I à la droite IA_1.

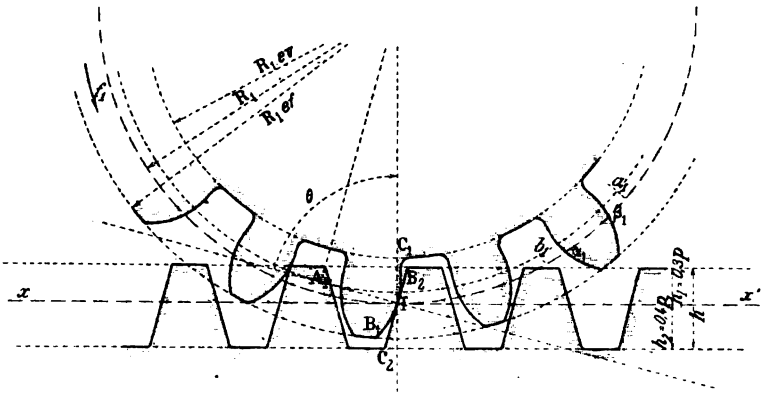


Fig 79.

β) **Lignes d'échanfrinement et d'évidement.** — En donnant aux dents des hauteurs de tête et de pied respectivement égales à $0,3p$ et $0,4p$, nous obtiendrons les lignes d'échanfrinement et d'évidement des dents.

Sur l'épure, nous avons indiqué le tracé de la dent qui a pour épaisseur $\alpha_1\beta_1$.

53. Tracé Willis par deux arcs de circonférence.

Par le point de contact I des circonférences primitives (fig. 88), menons la perpendiculaire à la droite IA_1 inclinée d'environ 75° sur la ligne des centres et portons sur elle deux longueurs égales IC et IC', mais inférieures à la projection Io_1 du rayon du pignon ; puis joignons les points C et C' aux centres des deux lignes primitives des deux roues et prenons les points de rencontre A_1, A_2, B_1, B_2 des droites obtenues avec la droite IA_1 : ils correspondent aux centres des quatre arcs de cercle qui vont servir de profils aux dents des deux roues. Pour obtenir leurs rayons, nous remarquons que les points A_1 et A_2 d'une part, B_1 et B_2 d'autre part, sont les centres de deux couples de profils conjugués que nous assujettissons, avec Willis, à se trouver en contact sur la droite IA_1 un demi-pas avant et un demi-pas après la ligne des centres.

Digitized by Google

Des considérations analogues à celles développées § 29 et déduites des hypothèses précédentes nous conduisent aux résultats suivants : Les

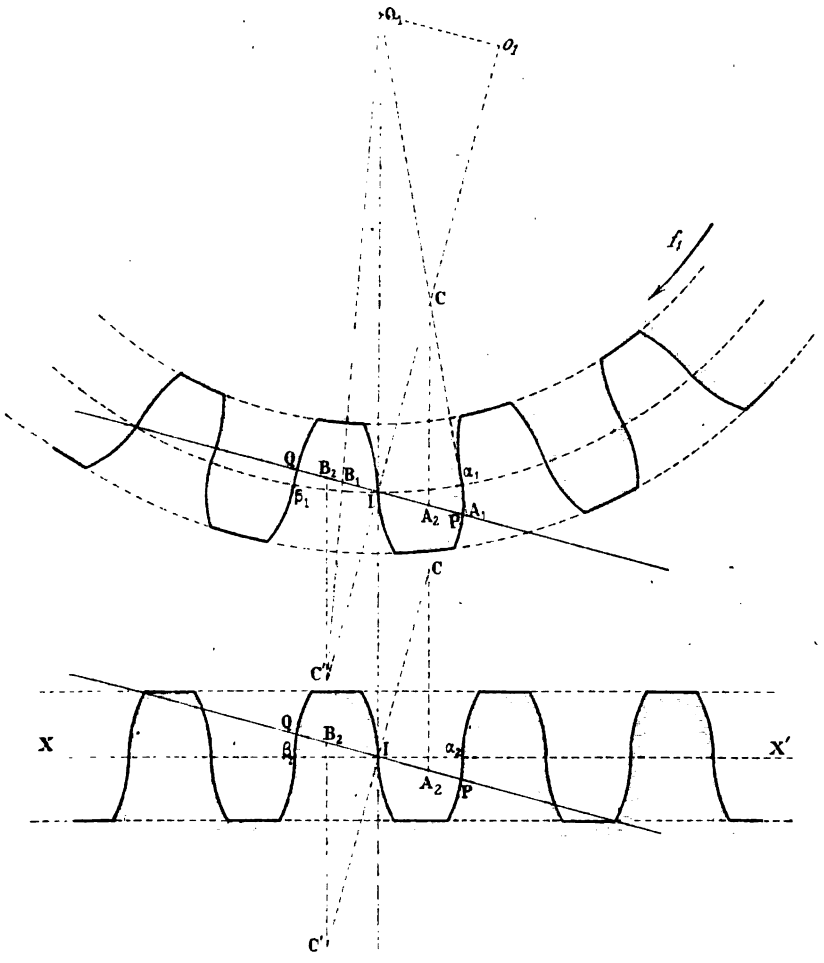


Fig. 80.

rayons de la face et du flanc du pignon sont $B_1\alpha_1$ et $A_1\beta_1$; ceux du flanc et de la face de la crémaillère sont $B_2\alpha_2$ et $A_2\beta_2$.

Comme précédemment $0{,}3p$ et $0{,}4p$ sont les hauteurs de tête et de pied des dents.

Digitized by Google

CHAPITRE VI

—

ENGRENAGES CONIQUES OU ROUES D'ANGLE

54. Problème général. — *Transmettre le mouvement de rotation de sens f_1 et de vitesse angulaire ω_1 d'un arbre Ox_1 à un arbre Ox_2 concourant avec lui de telle façon qu'il tourne dans le sens de la flèche f_2 avec une vitesse angulaire ω_2, en calant sur les deux arbres deux corps A_1 et A_2 en contact et dont on déterminera la nature en s'imposant que le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ des vitesses angulaires soit constant et que les vitesses relatives des points de contact de l'un des corps par rapport à l'autre soient les moindres possible.*

Pour plan x_1ox_2 des arbres, prenons celui de la feuille de papier et, suivant les conventions faites § 175, représentons (fig. 82) les deux rotations données par les vecteurs (OP_2) et (OP_1).

Ceci posé, étudions le mouvement relatif du corps A_2 par rapport au corps A_1. Communiquons, à cet effet, à l'ensemble des deux corps un mouvement de rotation qui annule celui du corps A_1. Comme il lui correspond un vecteur (OP'_1) égal et directement opposé au vecteur (OP_1), le mouvement relatif cherché résulte de deux rotations concourantes et équivaut par suite au mouvement de rotation défini par le vecteur (OR) résultante des vecteurs (OP'_1) et (OP_2).

Pour le définir en fonction des données du problème, désignons, par α l'angle aigu des axes, par α_1 et α_2 les angles x_1OR, x_2OR et considérons le triangle OP_2R ; il donne :

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Comme d'autre part :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

les angles α_1 et α_2 dépendent seulement des constantes α et $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ et par suite sont indépendants du temps.

Digitized by Google

Le lieu de l'axe instantané OR autour duquel s'effectue à chaque ins-

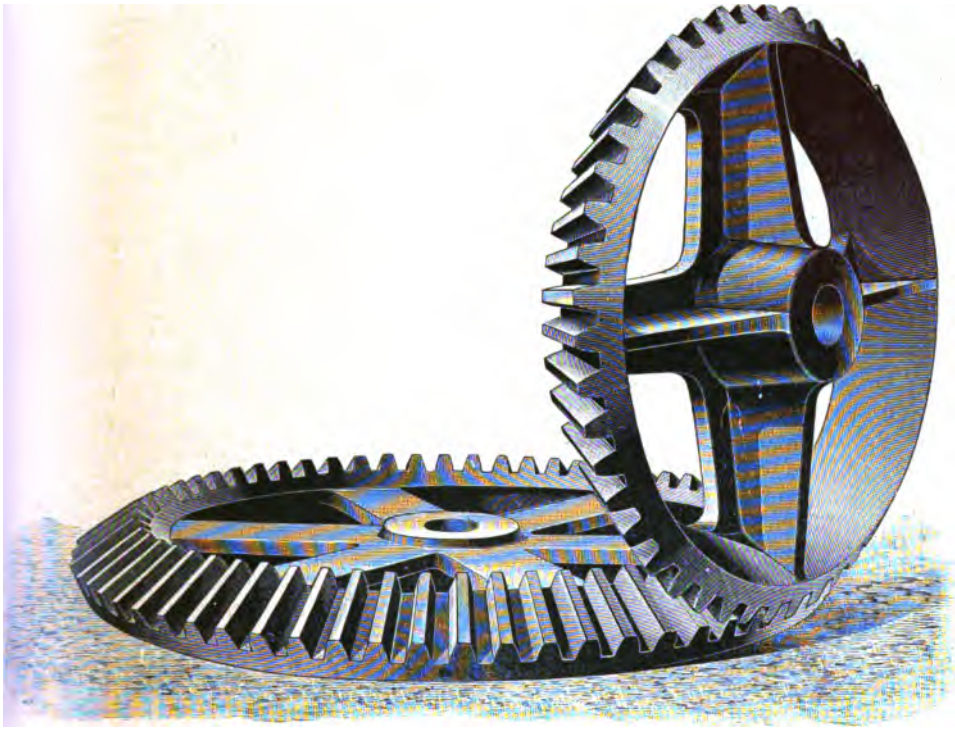


Fig. 81.

tant le mouvement relatif du corps A_2 par rapport au corps A_1 se compose donc : dans le corps A_1, d'un cône de révolution d'axe Ox_1 et d'angle générateur α_1 ; dans le corps A_2 d'un second cône de révolution d'axe Ox_2 et d'angle générateur α_2.

Si nous réduisons alors les deux corps A_1 et A_2 à ces deux cônes, les points du corps A_2 en contact avec le corps A_1 appartiennent à l'axe instantané de rotation et ont à chaque instant des vitesses relatives nulles ; toutes les conditions de l'énoncé sont alors satisfaites.

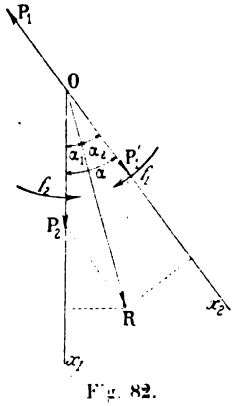


Fig. 82.

Cette transmission de mouvement par cônes de friction, admissible dans le cas où la résistance à vaincre est très faible, ne l'est plus cependant quand elle devient considérable. Dans ce cas, par suite du frottement des deux cônes, frottement nécessaire pour assurer la transmission

Digitized by Google

de mouvement, il se produit une usure rapide qui altère leurs contours. Pour remédier à cet inconvénient, on arme de dents leurs surfaces et l'on obtient alors des engrenages connus sous le nom d'*engrenage coniques ou roues d'angle.*

55. Problème. — *Connaissant les nombres n_1 et n_2 de tours faits par les arbres Ox_1, Ox_2 dans le même temps, construire la droite qui, en tournant successivement autour de chacun d'eux, engendre les cônes de friction.*

La relation :

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

déterminée précédemment, peut s'écrire :

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

En désignant par l une longueur arbitraire et multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{n_2}{n_1}$ par l, elle devient :

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2 l}{n_1 l},$$

et permet de conclure que la diagonale OR du parallélogramme dont les côtés OP'_1 et OP_2 portés par les axes eux-mêmes ont respectivement pour longueurs $n_1 l$ et $n_2 l$ partage l'angle α en deux parties α_1 et α_2 et coïncide par suite avec la droite cherchée.

56. Remarque. — Aux deux cônes extérieurs auxquels nous venons de parvenir correspond un engrenage conique extérieur.

Dans le cas où les deux rotations données ω_1 et ω_2 sont de même sens, les cônes de friction correspondant sont intérieurs et l'engrenage qui en résulte est dit intérieur.

En pratique, on n'admet pas l'engrenage conique intérieur par suite de la difficulté que donnent et l'exécution de son modèle et son ajustage. C'est pourquoi nous ne considérerons dans ce qui va suivre que des cônes de friction extérieurs l'un à l'autre.

57. Nature des dents et détermination de leurs profils. — Pour obtenir la nature des dents d'un engrenage conique, nous ferons la remarque suivante : le problème résolu précédemment n'est qu'une

Digitized by Google

généralisation de celui étudié § 7 puisque deux droites parallèles peuvent être regardées comme deux droites concourantes à l'infini. Si donc nous généralisons les résultats relatifs aux engrenages cylindriques, nous obtiendrons ceux qui se rapportent aux engrenages coniques.

a) Les dents des roues d'un engrenage cylindrique étant des cylindres dont les génératrices sont parallèles aux arbres de rotation, *celles des roues d'un engrenage conique sont des cônes ayant pour sommet commun le point de concours de ces axes.*

b) Une roue cylindrique étant limitée à deux plans perpendiculaires aux axes de rotation et distants l'un de l'autre de la longueur de la dent, *une roue conique est limitée à deux sphères ayant pour centre commun le point de concours* O *de ces axes et la différence de leurs rayons mesure la longueur des dents de l'engrenage.*

Les cônes de friction se trouvent ainsi réduits à des troncs de cônes limités d'une part aux cercles C_1 et C_2 et d'autre part aux cercles C'_1 et C'_2 (fig. 86).

c) Les dents coniques que nous cherchons sont complètement définies par leurs directrices ou *profils*. Dans le cas des engrenages cylindriques, ils étaient tracés sur un plan perpendiculaire aux axes et étaient obtenus par les méthodes des enveloppes ou des roulettes qui toutes deux reposaient sur la nature du mouvement relatif de l'un des cylindres de friction par rapport à l'autre.

Dans le cas actuel, la nature de ce mouvement n'ayant pas changé, les méthodes précédentes s'appliquent et les profils sphériques à déterminer appartiennent à une sphère de centre O qui coupe les deux cônes de friction suivant les cercles primitifs C_1 et C_2 de l'engrenage.

58. Denture épicycloïdale. — Soient (fig. 83) O_1 et O_2 les cercles d'intersection des cônes de friction avec une sphère de centre O et de rayon OI, C_1 et C_2 deux de ses petits cercles tangents aux précédents au point I. Tout en les maintenant sur la sphère, faisons-les rouler sur chacune des circonférences primitives, l'un à droite de la ligne des pôles O_1O_2, l'autre à gauche, et traçons les arcs d'épicycloïdes et d'hypocycloïdes sphériques engendrés par le point I dans chacun de ces mouvements; ils correspondent aux profils des dents et sont limités à des cercles d'échanfrinement et d'évidement qui ont mêmes pôles que les cercles primitifs et qui s'obtiennent en s'appuyant sur des considérations analogues à celles développées § 19.

Remarque. — Dans le cas où les circonférences des roulettes passent par les pôles O_1 et O_2 des circonférences primitives, les arcs d'hypocycloïdes qui servent de flancs aux dents deviennent des arcs de grands

Digitized by Google

cercles et l'engrenage conique obtenu correspond à l'engrenage cylindrique à courbes épicycloïdales et à flancs rectilignes.

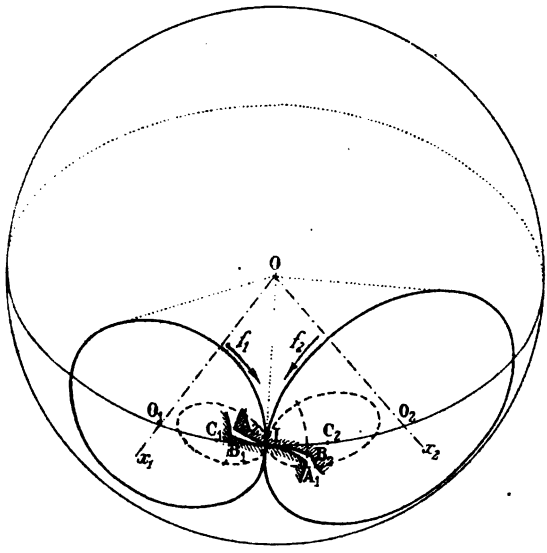


Fig. 83.

59. Denture à développantes. — Soient toujours (fig. 84) Ox_1

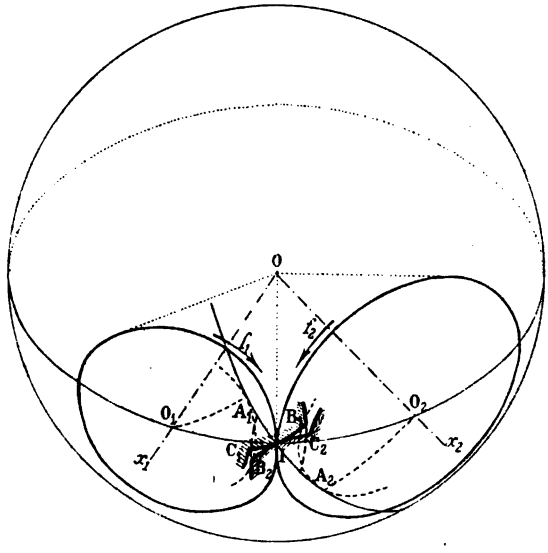


Fig. 84.

et Ox_2 les axes de rotation, O_1 et O_2 les circonférences primitives de l'engrenage. Par la génératrice OI, commune aux deux cônes de

Digitized by Google

friction, faisons passer un plan incliné sur celui des axes d'un angle de 75° environ et traçons les grands cercles O_1A_1, O_2A_2 qui sont normaux au grand cercle A_1IA_2 de section. Les petits cercles qui ont respectivement pour centres les points O_1 et O_2 et pour rayons les longueurs O_1A_1, O_2A_2 sont les bases des développantes de cercle qui vont servir de profils aux dents; celles qui nous occupent passent par le point I et admettent pour normale en ce point le grand cercle A_1A_2. Les dents s'échanfrinent et s'évident ensuite comme dans l'exemple précédent.

60. Denture à flancs circulaires. — Pour effectuer le tracé d'une denture à flancs circulaires, conservons les notations précédentes,

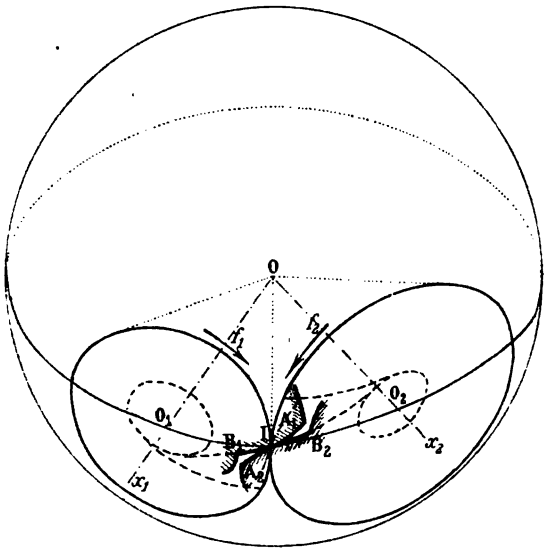


Fig.. 85.

et décrivons (fig. 85) du point O_1 comme centre un petit cercle dont le rayon ρ_1 vaut environ le sixième du rayon O_1I; puis, considérons celui de centre O_2 qui lui est homothétique par rapport au point I, et désignons par ρ_2 son rayon.

Pour flancs des dents des deux roues nous adoptons des arcs de grands cercles respectivement tangents aux cercles auxiliaires ρ_1 et ρ_2. Sur l'épure, nous avons figuré ceux qui sont tangents au point I et nous avons déterminé les faces des dents correspondantes en reprenant les constructions exposées § 13, et en substituant aux lignes droites des arcs de grands cercles jouissant des mêmes propriétés.

Digitized by Google

61. Denture de Tredgold. — Les épures relatives à la détermination des épicycloïdes et développantes sphériques étant toujours laborieuses, dans la pratique, l'on préfère substituer au tracé rigoureux celui de Tredgold qui n'est qu'approximatif. Il repose sur la remarque suivante : la portion de surface sphérique à laquelle appartiennent les profils des dents du cône Ox_1 se compose d'une zone qui a le cercle C_1 pour cercle moyen et qui se confond approximativement avec la surface latérale du cône qui lui est circonscrit le long de ce cercle et qui a par suite son sommet S_1 à l'intersection de l'axe Ox_1 et de la perpendiculaire élevée en I à la génératrice commune aux cônes de friction. Par analogie, à la portion de surface sphérique qui avoisine le cercle C_2, nous substituons celle du cône S_2 qui lui est circonscrite le long de ce cercle. Ces deux cônes S_1 et S_2 sont dits *cônes de tête extérieurs* ; ils sont respectivement complémentaires des cônes de friction et sont tangents tous deux au plan perpendiculaire à celui des axes et qui contient leur génératrice commune S_1S_2.

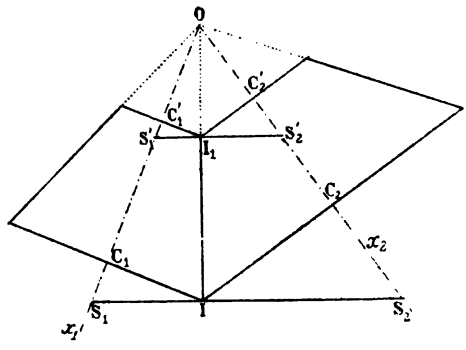


Fig. 86.

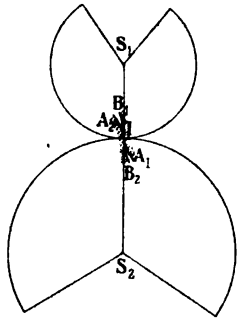


Fig. 87.

Si nous supposons les profils tracés sur ces cônes et si nous les développons sur leur plan tangent commun, nous obtenons des courbes A_1IB_1, A_2IB_2 que nous pouvons regarder comme deux profils conjugués d'un engrenage cylindrique dont les circonférences primitives S_1I et S_2I correspondent à celles qui limitent les secteurs de développements.

Des considérations analogues relatives à la seconde sphère OI_1 nous conduisent à la détermination de deux autres cônes S'_1 et S'_2 dits *cônes de tête intérieurs,* complémentaires aussi des cônes de friction et qui ont avec eux en commun les cercles C'_1 et C'_2.

62. Exécution de l'épure des dents. — Proposons-nous d'exécuter l'épure d'un engrenage conique dans le cas où l'on adopte des profils à flancs rectilignes divergents et où l'on connaît l'angle α des

Digitized by Google

axes, les nombres n_1 et n_2 de tours qu'ils font dans un même temps, le rayon R de la plus grande base de la roue calée sur l'arbre Ox_1, son nombre Z_1 de dents et la longueur l de chacune d'elles.

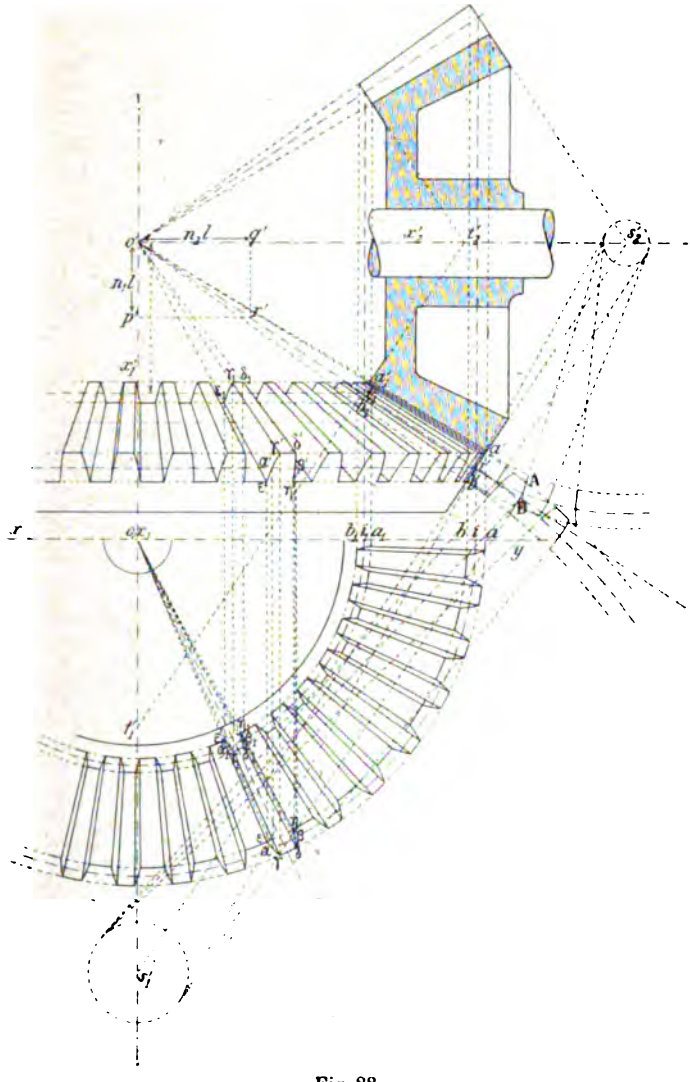


Fig. 88.

Prenons pour plan vertical de projection un plan parallèle à celui des axes et pour plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe Ox_1 par exemple.

Portons sur $o'x'_1$ une longueur $o'p'$ égale à $n_1 l$, l désignant une lon-

Digitized by Google

gueur absolument arbitraire, sur $o'y'$ une longueur $o'q'$ égale à $n_2 l$ et construisons le parallélogramme $o'p'q'r'$; sa diagonale $o'r'$ détermine la génératrice de contour apparent vertical commune aux deux cônes de friction.

Sur l'épure nous n'effectuerons le tracé des dents que pour la roue calée sur l'arbre Ox_1 ; il serait identique sur l'autre roue.

Sur la ligne de terre xy, à partir du point o, portons une longueur oi égale à R et rappelons i en i' ; à partir du point i', sur la projection verticale $o'i'$ de la génératrice commune aux deux cônes de friction, portons une longueur $i'i'_1$ égale à l, puis rappelons i'_1 en i_1. Les parallèles des points $(i\,.\,i')$, $(i_1\,.\,i'_1)$ sont les bases de la roue calée sur l'arbre $(ox_1,\ o'x'_1)$ et les points s'_1, s'_2, t'_1, t'_2 sont les projections verticales des sommets des cônes de tête extérieurs et intérieurs. Les secteurs, développements des premiers, ont pour centres les points s'_1 et s'_2 et pour rayons $s'_1 i'$, $s'_2 i'$, et la courbe AB, obtenue en appliquant les constructions exposées § 12, représente la transformée du profil des dents de la roue Ox_1. En la reportant sur les cônes eux-mêmes, nous obtenons les projections du profil cherché.

Sur les cônes de tête extérieurs et intérieurs, les circonférences d'échanfrinement et d'évidement ont pour rayons oa, oa_1, ob, ob_1.

Pour obtenir les projections d'une dent, sur la circonférence oi divisée en Z_1 parties égales, nous prenons l'arc $\alpha\beta$ qui correspond à son épaisseur ; puis nous déterminons les points γ, δ, ε, η, symétriques deux à deux par rapport au rayon qui passe par le milieu de l'épaisseur et auxquels correspondent des longueurs d'arcs $\gamma\delta$, $\eta\varepsilon$ respectivement égales à celles de leurs transformées. Nous joignons ensuite les points $\eta, \gamma, \delta, \varepsilon$, au centre o et nous limitons les droites obtenues aux circonférences d'échanfrinement et d'évidement du cône de tête intérieur ; nous obtenons ainsi en $\eta\gamma\delta\varepsilon\eta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1$ la projection horizontale de la dent et en $\eta'\gamma'\delta'\varepsilon'\eta'_1\gamma'_1\delta'_1\varepsilon'_1$ sa projection verticale.

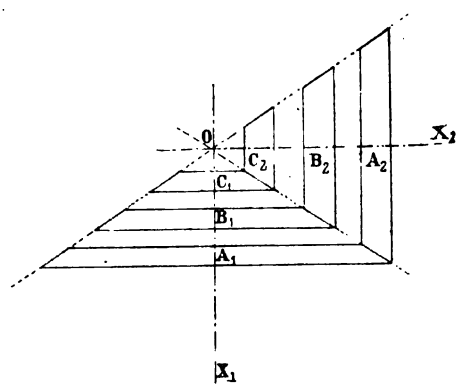


Fig. 89.

63. Série de roues coniques. — Il existe une infinité de couples de roues $(A_1 \cdot A_2)$, $(B_1 \cdot B_2)$..... qui permettent de transmettre le mouvement de rotation d'un arbre OX_1 à un

Digitized by Google

arbre OX_2 de telle façon que le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ de leurs vitesses angulaires soit constant. Toutes ces roues forment ce qu'on appelle une série à laquelle correspond le nombre $\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

64. PROBLÈME. — *Est-il possible de trouver dans toutes les séries de roues qui fonctionnent sous un angle* β *deux roues qui fonctionnent sous un angle* α *avec un rapport* $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *de vitesses angulaires?*

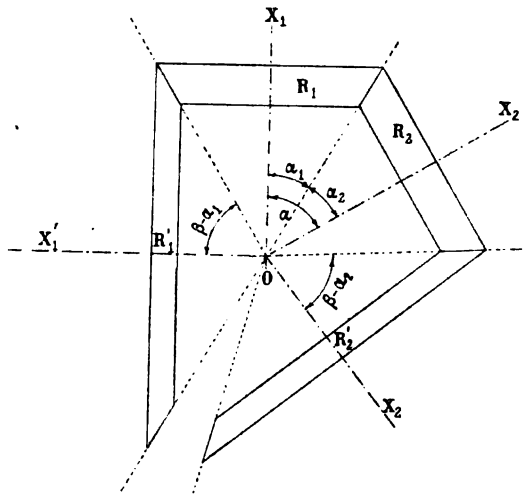


Fig. 91.

Supposons pour l'instant qu'elles existent et désignons-les par R_1 et R_2; appelons α_1 et α_2 leurs angles générateurs et désignons par Z_1 et Z_2 leurs nombre de dents. Par hypothèse, la première engrène avec une roue R'_1, de dents Z'_1 et fonctionne sous un angle β; la seconde engrène de même avec une roue R'_2 de Z'_2 dents et fonctionne sous un angle β. Nous pouvons donc poser les relations :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha,$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2},$$

$$\frac{\sin(\beta - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{Z'_1}{Z_1},$$

$$\frac{\sin(\beta - \alpha_2)}{\sin \alpha_2} = \frac{Z'_2}{Z_2}.$$

Les deux premières équations déterminent les angles α_1 et α_2. Les deux dernières montrent que les roues cherchées appartiennent aux séries caractérisées par les nombres $\frac{\sin(\beta - \alpha_1)}{\sin \alpha_1}$, $\frac{\sin(\beta - \alpha_2)}{\sin \alpha_2}$ et le problème posé revient à chercher si parmi ces deux séries il existe deux

Digitized by Google

roues dont les nombres de dents Z_1 et Z_2 sont liés par la relation :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Si oui, le problème posé est possible.

65. Application (1) . — Faisons une application au cas où :

$$\alpha = 60°, \quad \beta = 90° \quad \text{et} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2.$$

Alors :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 60°,$$

$$\sin \alpha_1 = 2 \sin \alpha_2.$$

Par suite :

$$\alpha_1 = 41°, \quad \alpha_2 = 19°.$$

D'autre part :

$$\frac{\sin(\beta - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} = \operatorname{cotg} \alpha_1 = 1{,}15,$$

$$\frac{\sin(\beta - \alpha_2)}{\sin \alpha_2} = \operatorname{cotg} 19° = 2{,}9.$$

Parmi les roues de la série 1,15 figure le couple de 23 et 20 dents ; parmi celles de la série 2,9 figure celui de 46 et 16 dents. Il en résulte que le problème est possible à la condition de prendre :

$$Z_1 = 46, \quad Z_2 = 23.$$

(1) Génie civil.

Digitized by Google

CHAPITRE VII

ENGRENAGES HYPERBOLOÏDES

66. Problème. — *Transmettre le mouvement de rotation de sens f_1 et de vitesse angulaire ω_1 d'un arbre x_1y_1 à un arbre x_2y_2 ne le rencontrant pas de telle façon qu'il tourne dans le sens de la flèche f_2 avec une vitesse ω_2, en calant sur les deux arbres du corps A_1 et A_2 en contact dont on déterminera la nature en supposant que le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ des vitesses angulaires demeure constant et que les vitesses relatives de glissement des points de contact de l'un des corps par rapport à l'autre sont les moindres possible.*

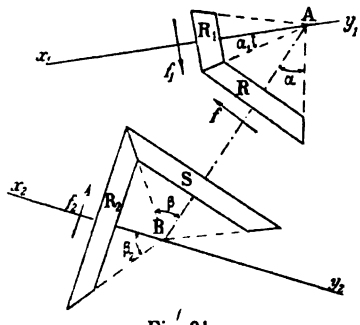


Fig. 91.

a) *Solution indirecte.* — Par l'intermédiaire de deux roues d'angle R_1 et R, de sommet A, d'angles générateurs α_1 et α, calées sur les arbres x_1y_1 et AB nous transformons la rotation de l'arbre x_1y_1 en une rotation de l'arbre AB ; elle a pour sens celui de la flèche f et une vitesse angulaire égale à ω. De même, par l'intermédiaire de deux autres roues d'angle S et R_2, de sommet B, d'angles générateurs β et β_2, calées sur les arbres AB et x_2y_2 nous transformons la rotation ω en une rotation de l'arbre x_2y_2 ; elle a pour sens celui de la flèche f_2 et une vitesse angulaire égale à ω_2. Il est facile d'établir que nous avons réalisé la transformation demandée. En effet, entre les vitesses angulaires ω_1, ω, et ω_2 existent les relations :

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1},$$

$$\frac{\omega}{\omega_2} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta}.$$

Digitized by Google

Multipliées membre à membre, elles conduisent à la suivante :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta_2}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta}.$$

Comme son second membre est constant, il en est de même du premier et la première condition de l'énoncé se trouve satisfaite. Quant à la seconde, elle l'est également d'après la théorie des engrenages coniques.

b) *Solution directe.* — Soient (O_1P_1), (O_2P_2), les vecteurs qui définissent les deux rotations données, O_1O_2 la perpendiculaire commune à leurs axes et δ leur plus courte distance.

Pour étudier le mouvement relatif du corps A_2 par rapport au corps A_1, communiquons aux deux corps une rotation qui annule le mouvement du premier ; elle est représentée par le vecteur $(O_1P'_1)$ égal et contraire au vecteur (O_1P_1). Au mouvement cherché, résultant des deux rotations $(O_1P'_1)$ et (O_2P_2) qui ne se rencontrent pas, correspond donc un mouvement hélicoïdal que nous allons définir. Communiquons, à cet effet, au corps A_2 deux rotations (O_2Q_1), (O_2Q_2) égales, de sens contraires, et de vitesse angulaire ω_1 ; son mouvement relatif ne change pas et résulte alors de quatre rotations : deux (O_2P_2), (O_2Q_2), sont concourantes et équivalent à la rotation unique (OR) à laquelle nous faisons correspondre une vitesse angulaire Ω; les deux autres $(O_1P'_1)$, (O_2Q_1) forment un couple de rotation et qui équivalent par suite à une translation dont la vitesse V, représentée par le vecteur (O_2S) perpendiculaire au plan $O_1O_2Q_2$, a pour expression $\omega_1\delta$. Ces deux mouvements résultants, composés ensuite d'après les principes exposés en cinématique théorique § 195, conduisent à la position de l'axe instantané IJ du mouvement hélicoïdal. Il est parallèle à la droite OR, partage l'angle α en deux parties α_1 et α_2, et détermine sur le segment δ de perpendiculaire commune deux segments $O_1I = \delta_1$, $O_2I = \delta_2$. Au point de vue *algébrique* il est déterminé dès que l'on connaît, en fonction des données du problème, l'un des angles α_1 ou α_2 et l'un des segments δ_1 ou δ_2 ; pour la symétrie des calculs, nous rechercherons à la fois les angles α_1 et α_2 et les segments δ_1 et δ_2.

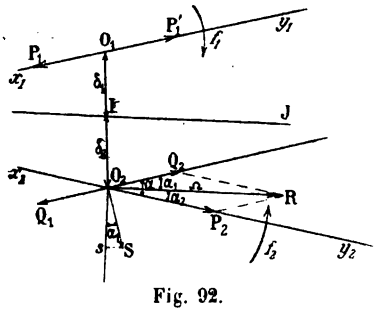


Fig. 92.

a) **Calcul de α_1 et α_2.** — Tout d'abord :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha. \qquad (1)$$

Digitized by Google

D'autre part, la considération du triangle O_2P_2R nous permet d'écrire :

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (2)$$

Ces deux équations résolues, nous fournissent les valeurs des angles α_1 et α_2 ; comme la première donne la demi-somme de ces angles, nous allons rechercher leur demi-différence.

Une propriété des proportions nous permettant d'écrire l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1},$$

ou :

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Nous en déduisons :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Ceci posé, pour obtenir les valeurs des angles α_1 et α_2 eux-mêmes, supposons cette dernière équation résolue et posons :

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = a. \qquad (3')$$

Puis ajoutons et retranchons membre à membre l'équation précédente et la suivante :

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

nous obtenons alors :

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{2} + a.$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{2} - a.$$

Mais comme nous ne connaissons pas a, mais seulement $\operatorname{tg} a$, nous sommes tout naturellement conduits à évaluer $\operatorname{tg} \alpha_1$ et $\operatorname{tg} \alpha_2$. Nous pouvons alors écrire :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + a \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} a}.$$

Digitized by Google

ou :

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2+\omega_1}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2+\omega_1}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\frac{\omega_1}{\omega_2}}}{1-\frac{1-\frac{\omega_1}{\omega_2}}{1+\frac{\omega_1}{\omega_2}}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Un calcul identique donne :

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\frac{\omega_1}{\omega_2}}}{1+\frac{1-\frac{\omega_1}{\omega_2}}{1+\frac{\omega_1}{\omega_2}}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Les angles α_1 et α_2 dépendent donc uniquement du rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ et sont par suite indépendants du temps.

b) **Calcul de δ_1 et δ_2.** — Les relations établies en cinématique théorique § 180 nous permettent d'écrire :

$$\delta_2 = \frac{\omega_1}{\Omega} \times \delta\cos\alpha_1,$$

et comme le triangle O_2P_2R fournit la relation :

$$\frac{\omega_1}{\Omega} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Nous en déduisons :

$$\delta_2 = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \times \delta\cos\alpha_1,$$

ou :

$$\delta_2 = \delta\,\frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\cos\alpha_1} = \frac{\delta\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Par analogie :

$$\delta_1 = \frac{\delta\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Comme les angles α_1 et α_2 sont constants, il en est de même des segments δ_1 et δ_2.

La droite IJ, qui fait constamment le même angle α_1 avec l'axe x_1x_2 et qui de plus reste à la même distance δ_1 de cette droite, décrit donc

Digitized by Google

dans le corps A_1 un hyperboloïde de révolution dont l'axe est x_1x_2 et dont le rayon du cercle de gorge est mesuré par le segment δ_1. Le lieu de cette même droite dans le corps A_2 se confond avec un second hyperboloïde de révolution dont l'axe est y_1y_2 et dont le rayon du cercle de gorge est mesuré par le segment δ_2. Ces deux surfaces se touchent d'ailleurs suivant la droite IJ qui leur est commune par suite de la coïncidence des points et plans centraux qui lui correspondent dans chacune d'elles.

Si donc nous réduisons les deux corps A_1 et A_2 à ces deux hyperboloïdes, la première hypothèse de l'énoncé est satisfaite; la seconde l'est aussi puisque tous les points du corps A_2 en contact avec le corps A_1 appartiennent à l'axe instantané du mouvement hélicoïdal et ont de ce fait, à l'instant considéré, des vitesses relatives aussi petites que possible.

Lorsque la résistance à vaincre est peu considérable, les deux hyperboloïdes de révolution que nous venons de définir suffisent pour assurer la transmission de mouvement; mais, dès qu'elle dépasse certaines limites, pour des raisons analogues à celles indiquées précédemment, on est obligé de les armer de dents.

67. Remarques. — *a)* Les deux hyperboloïdes auxquels nous venons de parvenir étant extérieurs l'un à l'autre, on donne aux engrenages correspondants le nom d'engrenages hyperboloïdes extérieurs.

Dans le cas où l'on cherche à transformer une rotation donnée en une rotation de même sens, en conservant les autres conditions du problème, il suffit de caler sur les deux axes de rotation deux hyperboloïdes intérieurs; armés de dents, ils conduisent à des engrenages hyperboloïdes intérieurs.

b) Reportons-nous aux relations :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2},$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1},$$

trouvées précédemment. En les multipliant membre à membre, elles nous conduisent à la suivante :

$$\frac{\omega_2\delta_2}{\omega_1\delta_1} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2},$$

qui peut s'écrire :

$$\omega_1\delta_1 \cos \alpha_1 = \omega_2\delta_2 \cos \alpha_2.$$

Pour l'interpréter géométriquement, remarquons que l'expression

Digitized by Google

$\delta_1 \cos \alpha_1$ représente la valeur de la projection du segment δ_1 sur un plan qui contient le point I et qu'est perpendiculaire à la génératrice commune IJ ; par analogie, l'expression $\delta_2 \cos \alpha_2$ représente la projection du segment δ_2 sur ce même plan. La relation précédente exprime donc que le point de contact I des deux ellipses obtenues en coupant les deux hyperboloïdes de révolution par le plan précité, a la même vitesse, quel que soit l'axe autour duquel il effectue sa rotation. Nous pouvons donc envisager leurs cercles osculateurs dans le voisinage du point I, comme se rapportant aux circonférences primitives d'un engrenage cylindrique.

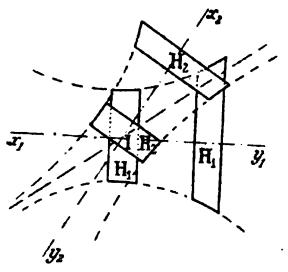


Fig. 93.

c) Dans le cas où la distance des axes est faible, les deux hyperboloïdes de friction sont limités à deux zones H_1 et H_2 situées d'un même côté des cercles de gorge ; dans le cas contraire ces deux zones admettent pour cercles moyens les cercles de gorge et peuvent être confondues sensiblement avec des surfaces cylindriques de révolution, d'axes x_1y_1 et x_2y_2, de rayons δ_1 et δ_2, et tangentes au point I seulement.

68. Tracé d'un engrenage hyperboloïde(1).

Deux arbres X_1Y_1, X_2Y_2, *non situés dans un même plan font entre eux un angle de* 40°, *leur plus courte distance est* 0m 100, *le rapport de leurs vitesses angulaires est égal à* $\frac{1}{2}$; *déterminer les hyperboloïdes de friction qui permettent de transmettre le mouvement de l'un à l'autre ; les réduire à des troncs d'hyperboloïde dont l'un a un cercle de base de diamètre connu et les armer respectivement de* 15 *et* 30 *dents, sachant qu'elles sont de même matière, que leur largeur est de* 0,05 *et que leurs flancs sont des surfaces planes dont le plan, à l'instant où les dents sont en contact suivant la génératrice commune* IJ, *est déterminé par cette génératrice et par la normale commune en* I *aux deux hyperboloïdes.*

a) **Recherche des hyperboloïdes de friction.** — Prenons pour plan vertical de projection celui qui est parallèle aux deux arbres de rotation et qui contient l'axe instantané du mouvement hélicoïdal. Puis sur les projections verticales $x'_1x'_2$, $y'_1y'_2$ des arbres, portons des longueurs $o'\beta'$, $o'\gamma' = 2o'\beta'$ et menons la diagonale $o'\delta'$ du parallélogramme $o'\beta'\delta'\gamma'$; elle se confond avec l'axe instantané du mouvement

(1) Cours de M. Guillemin, professé à l'école d'arts et métiers de Châlons.

Digitized by Google

hélicoïdal. Elle partage en effet l'angle aigu α en deux parties α_1 et α_2 qui satisfont aux relations :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha,$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

trouvées précédemment.

Nous n'en avons conservé que le segment $a'a'_1$ dont l'extrémité a'_1 correspond au cercle $a'_1 i'_1$ de diamètre connu.

Les deux hyperboloïdes se réduisent alors à des troncs d'hyperboloïdes : Le premier est limité en projection verticale aux cercles $a'i'$, $a'_1 i'_1$; le second aux cercles $a'j'$, $a'_1 j'_1$.

Perpendiculairement au segment de droite $a'a'_1$, nous menons un second segment qui, limité aux axes, a pour longueur $0^m,100$. La génératrice $a'a'_1$ de raccordement le partage en deux segments δ_1 et δ_2 qui sont les rayons des cercles de gorge. Ils vérifient en effet les relations :

$$\delta_1 + \delta_2 = 0,100,$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}.$$

b) **Recherche des profils des dents.** — Proposons-nous de rechercher et de figurer les profils des deux dents des roues X et Y qui se trouvent en contact suivant l'axe instantané du mouvement hélicoïdal. Leurs flancs, d'après l'énoncé même du problème, sont des plans qui contiennent cet axe lui-même et qui sont normaux aux deux hyperboloïdes; ils sont par suite déterminés par les droites projetées verticalement en $a'a'_1$ et $m'l'$. Quant à leurs faces ce sont des inconnues que nous allons rechercher.

α) *Recherche de l'une des faces de la dent de la roue* X. — La roue X étant supposée menante dans le sens de la flèche f_1, la roue Y tourne en sens contraire c'est-à-dire dans le sens de la flèche f_2.

La face que nous cherchons (fig. 94) coïncide avec l'enveloppe du flanc de la roue Y dans son mouvement relatif par rapport à l'autre roue, c'est-à-dire lorsqu'il tourne simultanément autour de l'axe X_1X_2 en sens contraire de la flèche f_1 et autour de l'axe Y_1Y_2 dans le sens de la flèche f_2 de telle façon que les nombres de tours ou fractions de tours qu'il effectue dans un même temps autour de chacun d'eux soient liés les uns aux autres par la relation

$$\frac{n_1}{{}_2n} = \frac{1}{2}.$$

Digitized by Google

Si donc à la première rotation correspond un angle de 9°, à la seconde correspondra un angle de 18°.

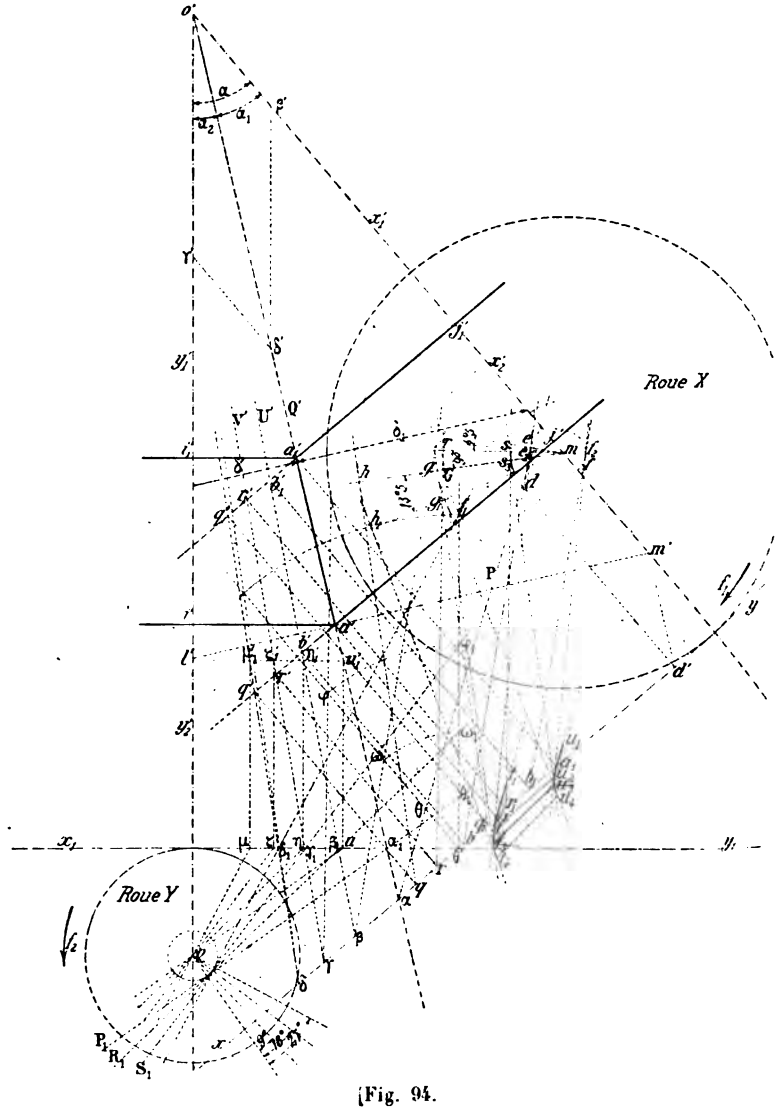


Fig. 94.

L'enveloppe cherchée étant une développable, nous la définirons par ses traces sur les plans qui limitent les deux troncs d'hyperboloïdes; nous pouvons les regarder comme les enveloppes des traces du flanc des dents de la roue Y dans les différentes positions qu'il vient occuper par suite de la mise en mouvement du mécanisme.

Digitized by Google

Pour les déterminer nous prenons sur l'épure deux lignes de terre xy, x_1y_1, respectivement perpendiculaires aux axes de rotation et répondant à deux systèmes (H.V), (H_1.V) de plans de projection. Dans le premier, nous figurons les traces αd, $\alpha a'$, du plan dont nous venons de parler en menant par le point ($m.m'$) la droite de front (md, $m'd'$) et en recherchant sa trace horizontale d. Nous déterminons ensuite ses droites d'intersection AT_1, et A_1U_1 avec les plans des parallèles qui limitent la roue X; elles sont tangentes aux points A et A_1 aux courbes que nous cherchons.

Puis nous effectuons un changement de plan et nous déterminons en α_1P_1 et α_1a' ses traces dans le système ($H.V_1$); nous faisons ensuite tourner d'un angle de 18° autour de l'axe Y. Il est alors défini en $R_1\beta_1U'$ dans le système (H_1.V) et en $\omega\beta U'$ dans le système (H.V). Les parallèles des points a', a'_1 le coupent suivant deux horizontales projetées horizontalement, en be et b_1f et qui, après avoir tourné autour de l'axe X, en sens inverse de la flèche f_1, d'un angle de 9° viennent occuper les positions e_2t_2, f_2u_2. Ce sont deux nouvelles tangentes aux courbes que nous cherchons; leurs points de contact sont t_2 et u_2.

En répétant le même raisonnement pour une rotation de 24° et de sens f_2 autour de l'axe Y, suivie d'une rotation de 12° en sens inverse de la flèche f_1 autour de l'axe X, nous obtenons deux nouvelles tangentes r_3t_3, s_3u_3 et les courbes at_2t_3, $a_1u_2u_3$ répondent à nos recherches.

β) *Détermination d'une face de la dent de la roue* Y. — La face que nous cherchons sur la roue Y (fig. 95) coïncide avec l'enveloppe du flanc de la dent de la roue X dans son mouvement relatif avant la génératrice de raccordement. Comme après cette génératrice, il se compose de deux rotations: l'une de sens f_1 autour de l'axe X, l'autre de sens contraire à f_2 autour de l'axe Y, et qu'avant il est de sens opposé, il se compose par suite de deux rotations: l'une autour de l'axe X de sens contraire à la flèche f_1, et répondant à un angle de 9° par exemple; l'autre autour de l'axe Y de sens f_2 et répondant à un angle de 18°. Après chaque couple de rotations, analogue à celui que nous venons de définir, le flanc de la roue Y se trouve coupé par les parallèles des points ($a.a'$), ($a_1.a'_1$) suivant des horizontales qui admettent pour enveloppe les directrices de la face que nous cherchons.

a) Avant les rotations, le flanc de la roue X se trouve représenté en $P_1\alpha Q'_1$ dans le système (H . V) et en $R_1\alpha_1Q'_1$ dans le système (H_1.V). Les parallèles dont nous venons de parler le coupent suivant les deux horizontales at_1 et a_1b_1; elles sont tangentes aux directrices aux points a et a_1.

Digitized by Google

b) Après l'avoir fait tourner de 9° autour de l'axe X en sens inverse de la flèche f_1, il vient occuper, dans le système (H . V), la position

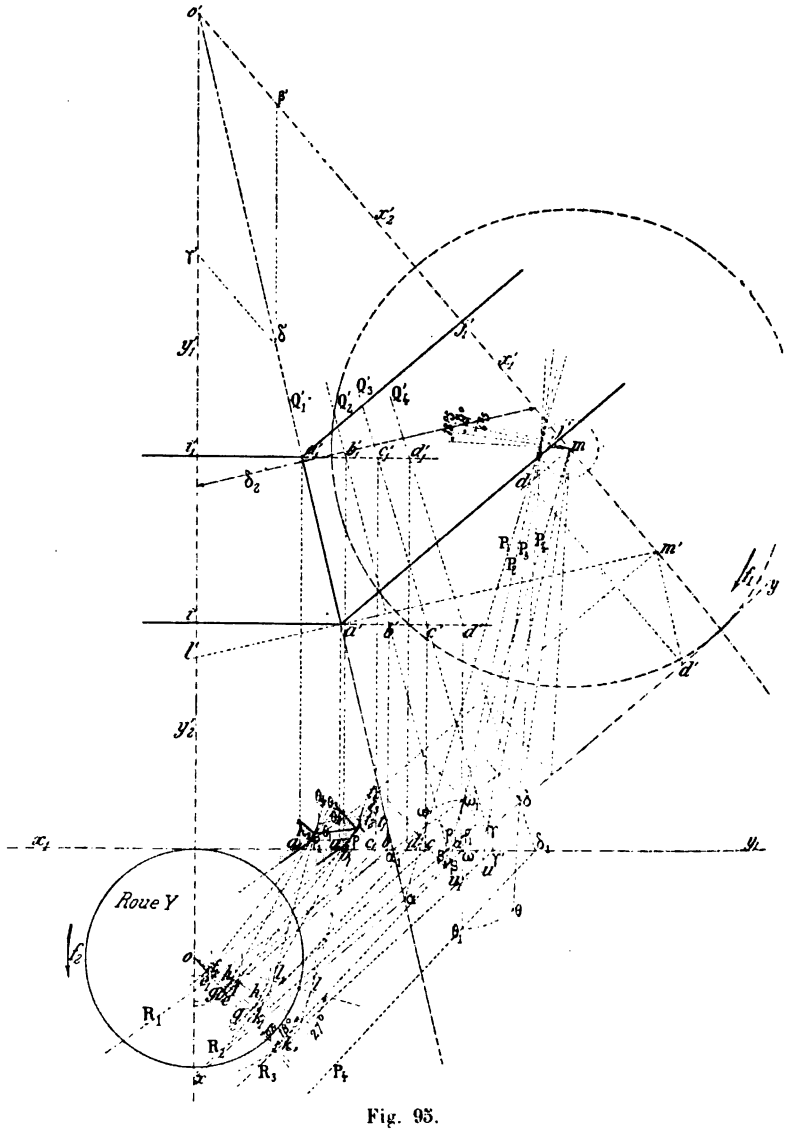


Fig. 95.

$P_2\beta Q'_2$, dans le système $(H_1 . V)$ la position $R_2\beta_1 Q'_2$; si nous lui communiquons ensuite une rotation de 18° autour de l'axe Y dans le sens de la flèche f_2, les horizontales be, b_1e_1, situées dans les plans horizontaux des points $(a . a')$, $(a_1 . a'_1)$ deviennent $f\ell_2$, $f_1\mathfrak{h}_2$ et sont tangentes à leurs enveloppes aux points ρ, ρ_1.

Digitized by Google

c) Après l'avoir fait tourner de 12° autour de l'axe X en sens inverse de la flèche f_1, il vient occuper, dans le système (H . V) la position $P_3\gamma Q'_3$, dans le système (H_1 . V), la position $R_3\gamma_1 Q'_3$; si nous lui communiquons ensuite une rotation de 24° autour de l'axe Y dans le sens de la flèche f_2, les horizontales cg, c_1g_1, situées dans les plans horizontaux des points $(a\,.\,a')$, $(a_1\,.\,a'_1)$, deviennent ht_3, $h_1\theta_3$ et touchent leurs enveloppes aux points $\lambda\,.\,\lambda_1$.

Les courbes $a\rho\lambda$, $a_1\rho_1\lambda_1$ correspondent donc aux directrices cherchées.

γ) *Recherche de la face de la roue* X *relative au second côté de la dent.* — La face de la roue X que nous nous proposons d'obtenir (fig. 96) nous permet de transmettre le mouvement de rotation de sens f'_1 de l'arbre X à l'arbre Y de telle façon qu'il tourne dans le sens de la flèche f'_2. Nous pouvons donc la regarder comme l'enveloppe du flanc de la roue Y dans son mouvement relatif par rapport à la roue X, c'est-à-dire lorsqu'il tourne tout d'abord dans le sens de la flèche f'_2 autour de l'arbre Y avec une vitesse angulaire ω_2 et ensuite en sens contraire de la flèche f'_1 autour de l'arbre X avec une vitesse angulaire ω_1 liée à la précédente par la relation :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}.$$

a) Avant les rotations, il occupe dans le système (H . V) la position $P_1\alpha Q'_1$ et détermine dans les plans horizontaux des points $(a\,.\,a')$, $(a_1\,.\,a'_1)$ deux horizontales at_1, $a_1\theta_1$ tangentes aux points a et a_1 aux courbes que nous cherchons.

b) Après l'avoir fait tourner de 9° autour de l'axe Y dans le sens de la flèche f'_2, il vient occuper la position $R_2\beta_1 Q'_2$ dans le système (H_1 . V) et la position $P_2\beta Q'_2$ dans le système (H . V) ; si nous lui communiquons ensuite une rotation de 4°,5 autour de l'axe X en sens inverse de la flèche f'_1, ses horizontales be, b_1d situées dans les plans horizontaux des points $(a\,.\,a')$, $(a_1\,.\,a'_1)$ deviennent e_2t_2, $d_2\theta_2$; ce sont deux nouvelles tangentes aux directrices.

d) Après l'avoir fait tourner de 18° autour de l'axe Y dans le sens de la flèche f'_2, il vient occuper la position $R_3\gamma_1 Q'_3$ dans le système (H_1 . V) et la position $P_3\gamma Q'_3$ dans le système (H . V) ; si nous lui communiquons ensuite une rotation de 9° autour de l'axe X en sens inverse de la flèche f'_1, ses horizontales fs, f_1g situées dans les plans horizontaux des points $(a\,.\,a')$, $(a_1\,.\,a'_1)$ deviennent s_3t_3, $g_3\theta_3$; ce sont deux tangentes nouvelles aux directrices représentées sur l'épure en at_3t_3 et $a_1\theta_2\theta_3$.

δ) *Recherche de la face de la roue* Y *relative au second côté de la*

Digitized by Google

dent. — La face de la roue Y relative au second côté de la dent (fig. 97) coïncide avec l'enveloppe du flanc de la dent de la roue X dans son mou-

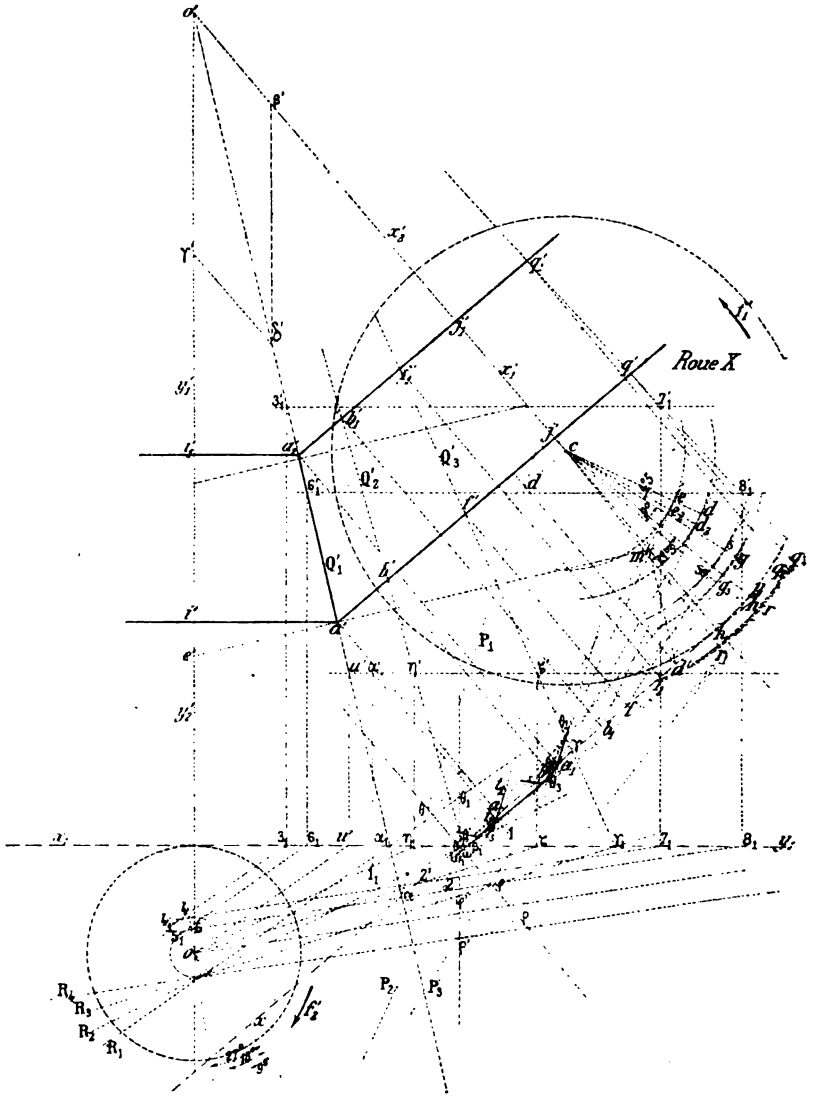


Fig. 96.

vement relatif par rapport à la roue Y, avant la génératrice de raccordement. Comme après cette génératrice, il résulte de deux rotations : l'une de sens f'_1 autour de l'axe X, l'autre de sens contraire à la flèche f'_2 autour de l'arbre Y, et qu'avant il est de sens opposé, il se compose

Digitized by Google

alors de deux rotations : l'une, de vitesse angulaire ω_1, de sens contraire à la flèche f'_1 autour de l'axe X, l'autre, de vitesse angulaire ω_2,

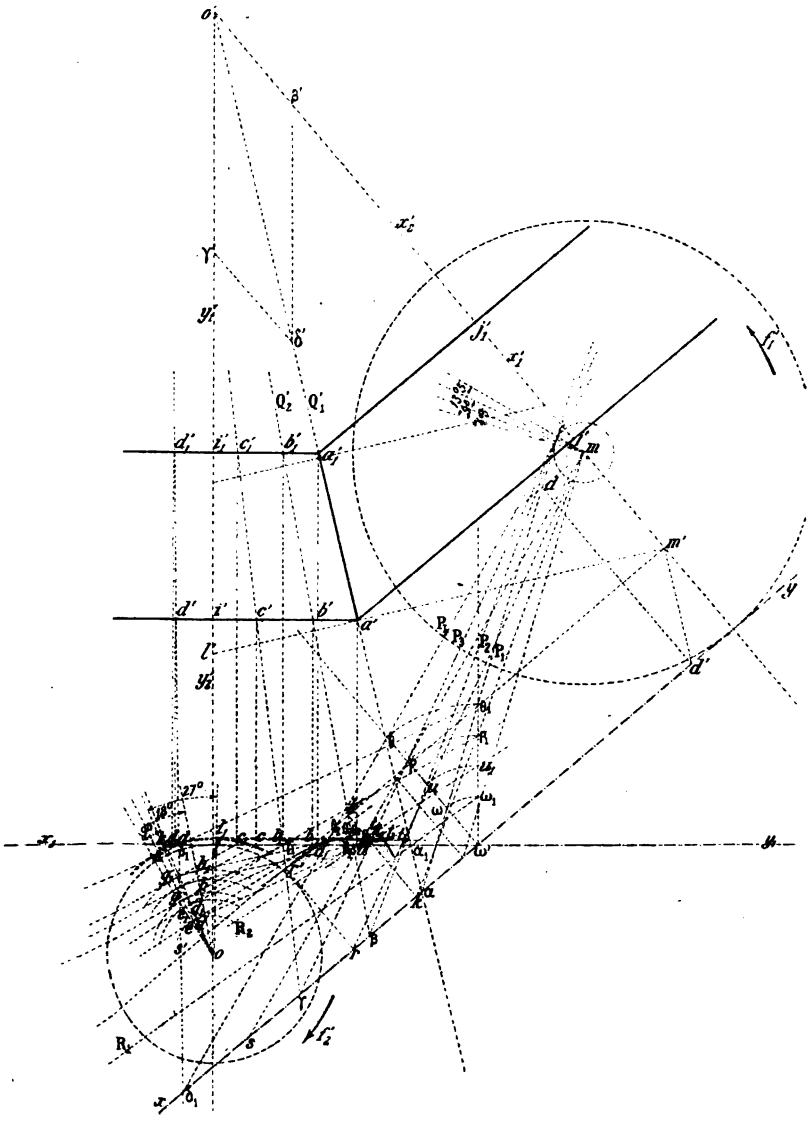


Fig. 97.

de sens f'_2, autour de l'arbre Y et liées toujours l'une à l'autre par la relation : $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$.

a) Avant les rotations le flanc des dents occupe la position $P_1\alpha Q'_1$

Digitized by Google

dans le système (H . V) et la position $R_1 x_1 Q'_1$ dans le système (H_1.V). Il coupe les parallèles des points $(a \,.\, a')$, $(a_1 \,.\, a'_1)$ suivant deux horizon-

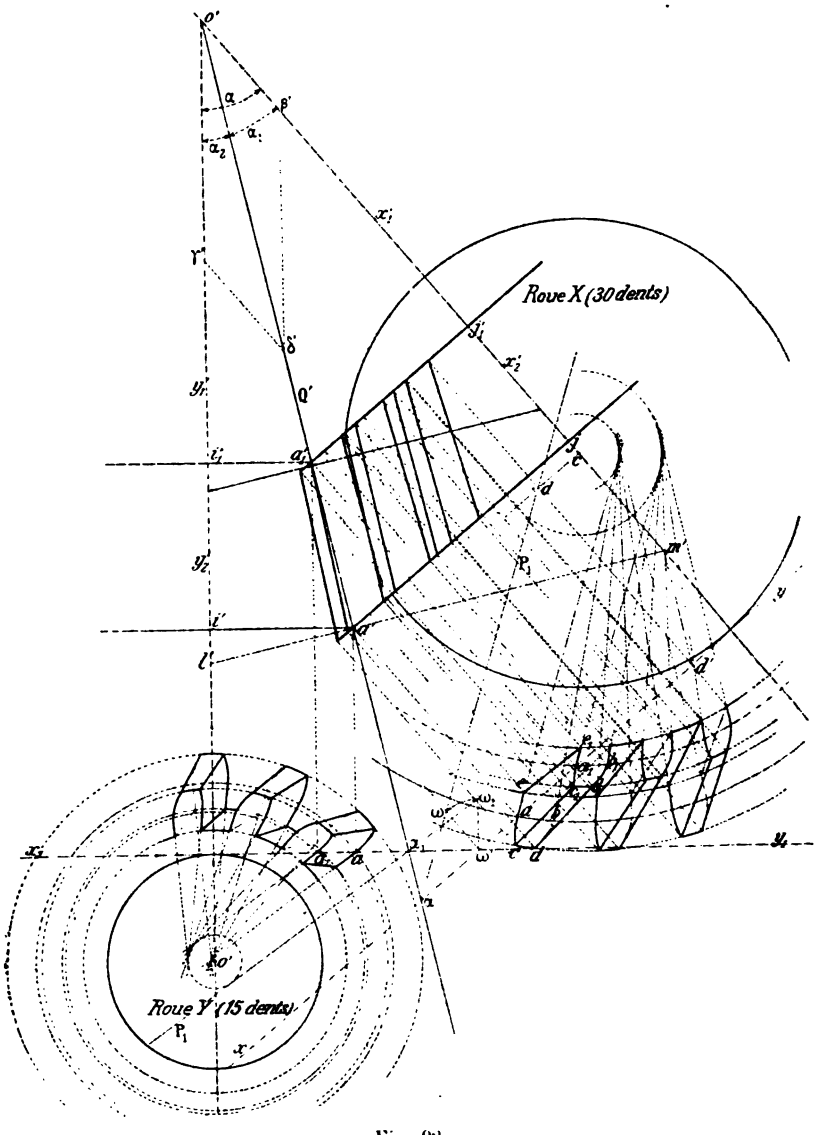


Fig. 98.

tales at_1, $a_1\theta_1$ qui sont tangentes aux points $(a \,.\, a')$, $(a_1 \,.\, a'_1)$ aux directrices que nous cherchons.

b) Après l'avoir fait tourner de 9° autour de l'axe X en sens contraire de la flèche f'_1, il vient occuper la position $P_2 \beta Q'_2$ dans le

Digitized by Google

système (H . V) et la position $R_2\beta_1Q'_2$, dans le système (H_1 . V); si nous lui communiquons ensuite une rotation de 18° autour de l'axe Y dans le sens de la flèche f'_2, ses horizontales be, b_1e_1, situées dans les plans horizontaux des points précités, deviennent dt_2, $d_1\theta_2$ et sont tangentes à ces mêmes directrices.

a) En opérant de même pour deux rotations de 13°,5 et 27° autour des arbres X et Y, nous obtenons en ht_3 et $h_1\theta_3$ un nouveau couple de tangentes aux directrices; ces dernières sont représentées sur l'épure en at_2t_3 et $a_1\theta_2\theta_3$.

η) *Épure d'ensemble.* — Pour effectuer l'épure d'ensemble (fig. 98) nous partageons les circonférences ja et ja_1 en arcs relatifs aux pleins et aux creux des trente dents dont nous devons armer la roue X et nous représentons, relativement à la dent qui intercepte sur ces deux circonférences les arcs ab, a_1b_1, en ac et a_1c_1 d'une part les traces de l'une de ses faces sur les plans des parallèles des points $(a\,.\,a')$, $(a_1\,.\,a'_1)$ (fig. 94), d'autre part en bd, b_1d_1 les traces sur ces mêmes plans de sa seconde face (fig. 96).

Pour limiter les dents, nous remarquons ensuite qu'à un instant quelconque, un flanc et une face conjugués se trouvent en contact suivant une génératrice qui n'est autre que la caractéristique du plan du flanc à cet instant. Puis nous supposons que la conduite a lieu $\frac{3}{4}$ de pas avant la génératrice de raccordement des deux hyperboloïdes et $\frac{3}{4}$ de pas après. Sur les roues X et Y le pas répond alors à des angles de $\frac{360°}{30} = 12°$, et de $\frac{360}{15°} = 24°$ et à l'approche et à la retraite correspondent par suite des angles de rotation respectivement égaux à $12 \times \frac{3}{4} = 9°$ sur la première roue et à $24 \times \frac{3}{4} = 18°$ sur la seconde roue. Il en résulte que nous pouvons tracer sur les flanc et face des dents de la roue X les caractéristiques ee_1, cc_1 correspondantes. En tournant autour de l'axe de cette roue elles engendrent les hyperboloïdes de révolution qui constituent les têtes et racines des dents et qui sont coupés par les parallèles des points $(a\,.\,a')$, $(a_1\,.\,a'_1)$ suivant les cercles jc, jc_1, je, je_1.

69. Tracé approché. — Le tracé approché consiste à substituer aux zones d'hyperboloïdes qui avoisinent le point I de la théorie générale les cônes qui leur sont circonscrits le long des parallèles correspondants et à effectuer les tracés comme s'il s'agissait de roues coniques.

Les deux cônes normaux à l'hyperboloïde figuré aux points $(i\,.\,i)$,

Digitized by Google

$(j \,.\, j')$ ont leurs sommets en $(s \,.\, s')$ et $(t \,.\, t')$. Le développement du premier associé à celui qui lui correspond sur l'autre roue conduit au profil $\alpha\beta\gamma\delta\eta\varepsilon$ qui fournit en om_1, on_1 les rayons des cercles d'échanfrinement et d'évidement sur le cône de tête extérieur et en op_1, oq_1 les rayons des mêmes cercles sur le cône de tête intérieur.

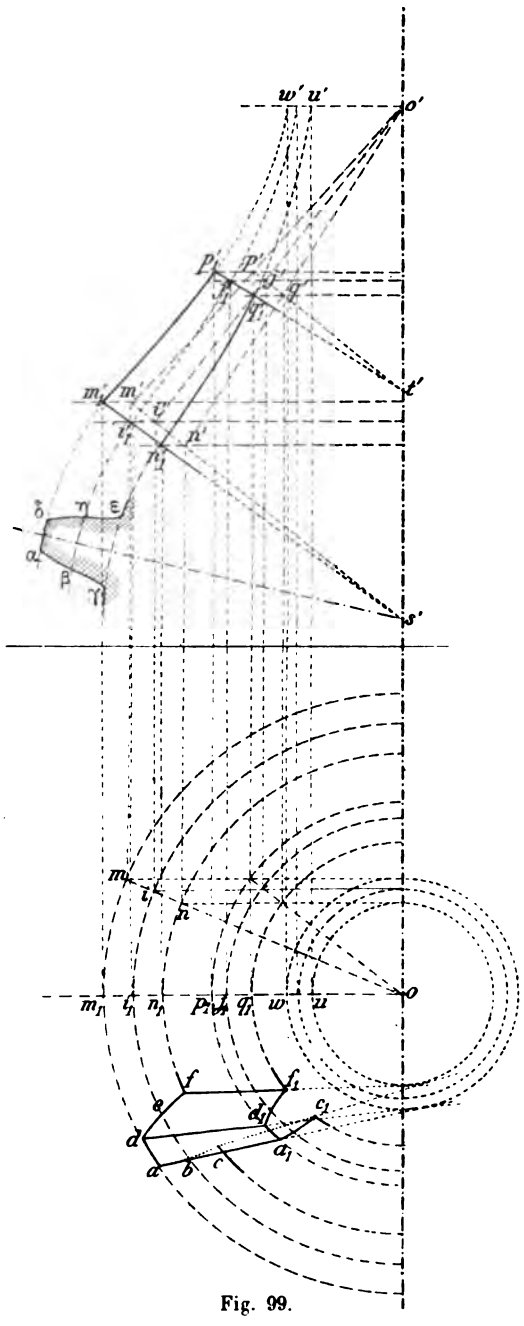


Fig. 99.

Pour effectuer le tracé d'une dent, nous reproduisons, sur le cône de tête extérieur, en *abcdef* la courbe qui a pour transformée le profil $\alpha\beta\gamma\delta\eta\varepsilon$, et comme les surfaces d'echanfrinement et d'évidement des dents d'une roue cylindrique ou coniques sont des surfaces de révolution de même nature que la roue considérée, pour limiter les dents d'un engrenage hyperboloïde nous adoptons des hyperboloïdes de révolution : celui d'échanfrinement contient les parallèles des points $(m \,.\, m')$, $(p \,.\, p)$ et a le cercle ow, $o'w'$ pour cercle de gorge ; celui d'évidement contient les parallèles des points $(n \,.\, n')$, $(q \,,\, q')$ et a le cercle $(ou \,.\, o'u')$ pour cercle de gorge. Les génératrices ff_1, aa_1, qui, en projection horizontale, limitent la tête de la dent sont tangentes au

Digitized by Google

cercle ow; celles, dd_1, cc_1, qui, au contraire, limitent sa racine, sont tangentes au cercle ou.

Remarque. — Pour obtenir les profils des dents nous aurions pu couper les deux hyperboloïdes par le plan perpendiculaire à la génératrice IJ de raccordement au point I, substituer aux sections obtenues les deux circonférences qui leur sont osculatrices en ce point et effectuer le tracé des dents dans le voisinage de ce point comme s'il s'agissait de roues cylindriques.

Digitized by Google

CHAPITRE VIII

—

ENGRENAGES HÉLICOÏDAUX

70. Les engrenages à dents courbes, dont l'étude fera l'objet de ce

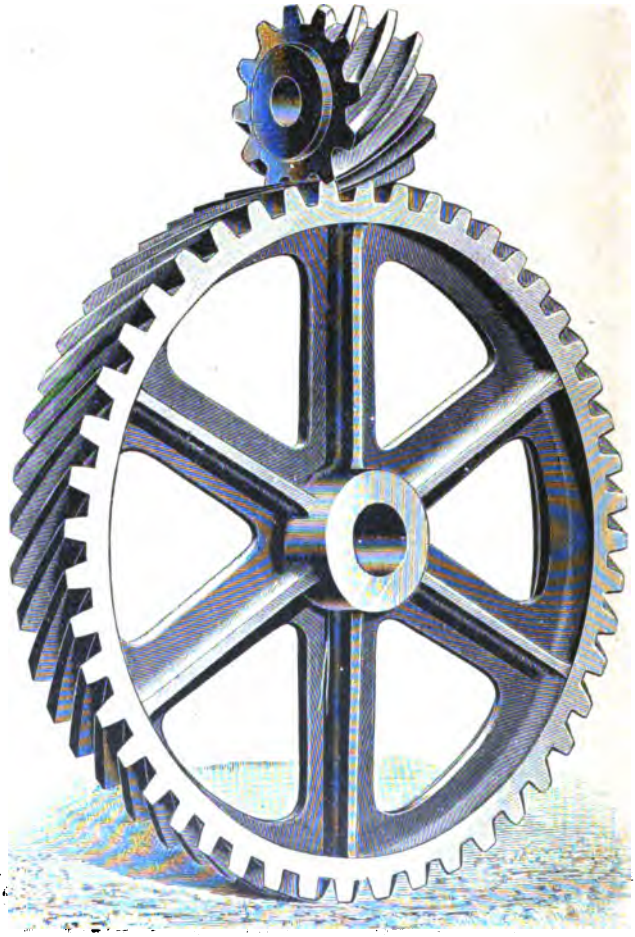


Fig. 100.

chapitre, étaient autrefois uniquement employés dans les appareils de

Digitized by Google

précision ; ils se répandent aujourd'hui de plus en plus dans l'industrie et se rencontrent surtout dans les mécanismes où l'on veut atténuer les frottements et où la résistance à vaincre ne dépasse pas certaines limites.

Comme nous l'avons exposé, § 11, dans ces engrenages, deux dents en prise ont, à chaque instant, un seul point de contact. Comme il appartient à l'axe instantané de rotation qui caractérise, à l'époque considérée, le mouvement relatif de l'une des roues par rapport à l'autre, le frottement de glissement est considérablement amoindri et la transmission de mouvement s'effectue avec une grande douceur sans chocs ni trépidations.

Pour procéder comme dans le cas des engrenages de force, nous diviserons en trois parties l'analyse qui va suivre.

a) La première comprendra les *engrenages cylindriques hélicoïdaux* qui permettent de relier deux arbres de rotation parallèles.

b) La deuxième, les *engrenages coniques hélicoïdaux* qui permettent de relier deux axes de rotation concourants.

c) La troisième enfin, les *engrenages hyperboliques hélicoïdaux* qui permettent de relier deux axes de rotation qui ne se rencontrent pas.

A. Engrenages hélicoïdaux cylindriques.

71. Recherche des surfaces des dents des deux roues. — Comme à chaque instant, le contact des deux dents en prise se fait sur l'axe instantané de rotation du mouvement relatif de l'une des roues par rapport à l'autre, le lieu des contacts se compose de deux courbes : l'une C_1 arbitraire appartient au cylindre O_1; l'autre C_2 appartient au cylindre O_2 et coïncide avec l'empreinte laissée sur le cylindre O_2 par la précédente quand le cylindre C_1 auquel elle appartient roule sur l'autre.

Les surfaces de deux dents conjuguées contiennent donc respectivement ces deux courbes et si nous les assujettissons de plus à avoir même plan en tous leurs points homologues, nous achèverons de les définir.

72. Engrenage de White. — *α) Les courbes C_1 et C_2 sont deux hélices circulaires.* — Dans le cas de l'engrenage de White, la courbe (C_1) n'est autre qu'une hélice circulaire de pas P_1. Son homologue C_2, comme nous allons l'établir, se confond alors avec une seconde hélice circulaire dont le pas P_2 est lié au précédent par la relation :

$$\frac{P_1}{R_1} = \frac{P_2}{R_2}.$$

Digitized by Google

A un instant quelconque, désignons en effet par I (fig. 101) le point commun à ces deux courbes et par i sa projection sur les deux circonférences primitives ; puis faisons tourner la roue O_1 autour de l'axe $O_1O'_1$ d'un angle $\widehat{iO_1i_1} = \theta_1$. La roue O_2 se met aussitôt en mouvement, tourne autour de l'axe $O_2O'_2$ d'un angle $\widehat{iO_2i_2} = \theta_2$ lié au précédent par la relation :

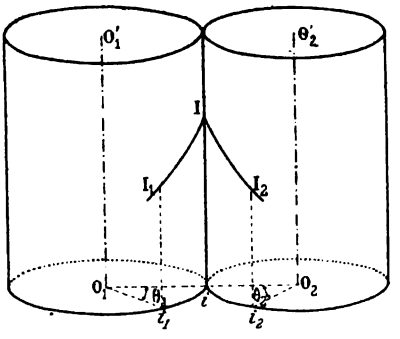


Fig. 101.

$$R_1\theta_1 = R_2\theta_2,$$

et un certain point I_1 de la génératrice i_1I_1 vient en coïncidence avec son homologue I_2 sur la génératrice i_2I_2.

D'après la théorie de l'hélice circulaire, l'expression de la différence de cotes des points I et I_1 d'une part, I et I_2 d'autre part peut s'écrire :

$$\frac{P_1}{2\pi R_1} \times \widehat{ii_1}.$$

ou bien encore :

$$\frac{P_1 \cdot \dfrac{R_2}{R_1}}{2\pi R_2} \times \widehat{ii_2}.$$

Finalement, la forme :

$$\frac{P_2}{2\pi R_2} \times \widehat{ii_2},$$

qu'elle prend, à la condition de poser :

$$\frac{P_1}{R_1} = \frac{P_2}{R_2},$$

justifie la proposition énoncée.

β) *Construction des hélices* C_1 *et* C_2. — Désignons par α_1 et α_2 les angles aigus des génératrices i_1I_1, i_2I_2 avec les tangentes aux hélices considérées aux points homologues I_1 et I_2 ; nous pouvons alors écrire :

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2\pi R_1}{P_1}, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2\pi R_2}{P_2},$$

et comme :

$$\frac{R_1}{P_1} = \frac{R_2}{P_2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2.$$

Par suite :

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Digitized by Google

Les deux hélices C_1 et C_2 admettent donc pour développée une même droite : elle passe par le point I, appartient au plan tangent commun aux deux cylindres de friction suivant la génératrice iI et fait avec cette dernière un angle égal à α_1.

γ) *Détermination de la surface des dents.* — Les considérations générales, exposées § 71, établissent nettement qu'il y a une infinité de surfaces de dents qui répondent à la question. Nous nous contenterons d'en indiquer deux.

Fig. 102.

a) Coupons les deux cylindres de friction par un plan perpendiculaire aux axes de rotation et considérons les sections droites obtenues comme cercles primitifs d'un engrenage cylindrique ; dessinons ensuite (fig. 103), d'après l'un des tracés connus, deux profils conjugués A_1IB_1, A_2IB_2 tangents au point I ; puis modifions-les de façon qu'ils soient en contact au point I seulement pendant la conduite et déplaçons leur plan parallèlement à lui-même, de telle sorte que le point I décrive respectivement les hélices (C_1) et (C_2). Il est facile d'établir que les surfaces S_1 et S_2 que nous engendrons ainsi sont celles de deux dents conjuguées.

En effet, au point I, le plan tangent à la première surface est déterminé par les tangentes qu'on peut mener à l'hélice (C_1) et au profil A_1IB_1 ; au même point, le plan tangent à la seconde surface est déterminé par les tangentes à l'hélice C_2 et au profil A_2IB_2, et comme ces quatre tangentes coïncident deux à deux, il en est de même des plans tangents qu'elles définissent. Le point I étant d'ailleurs un point quelconque des hélices (C_1) et (C_2), la propriété précédente est valable pour tous les points de ces courbes.

Remarques. — α) La formule :

$$dg = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) l\,ds,$$

établie § 22, qui donne l'expression de l'arc élémentaire de glissement

Digitized by Google

relatif de deux dents en prise, conduit à nier, dans le cas qui nous occupe, l'existence du frottement de glissement puisque $l = o$. Il n'en est cependant rien, car la génératrice commune des deux cylindres de friction autour de laquelle se fait la rotation instantanée du mouvement relatif de l'une des roues par rapport à l'autre n'est pas située

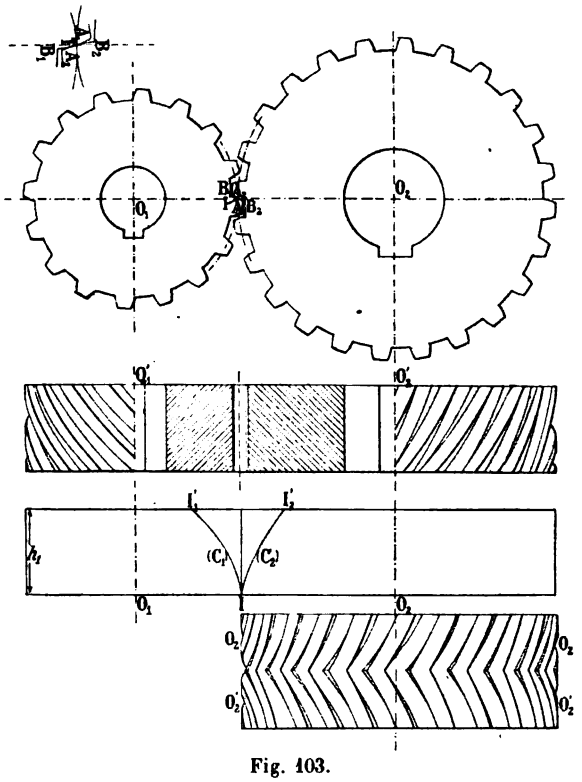


Fig. 103.

dans le plan tangent commun au point I aux surfaces des dents en prise. Le vecteur qui correspond à ce mouvement peut donc se décomposer en deux autres : l'un situé dans ce plan et qui donne lieu à un frottement de roulement ; l'autre qui lui est normal et qui donne lieu à un frottement de glissement bien moindre, comme on le conçoit facilement, que celui qu'on obtiendrait avec des dents droites. Et voilà pourquoi le fonctionnement d'un engrenage hélicoïdal se fait avec une douceur qui n'est certes pas une des caractéristiques des engrenages de force.

β) Comme les hélices (C_1) et (C_2) (fig. 103) rencontrent les bases supérieures des cylindres primitifs en des points I'_1 et I'_2, le point de contact

Digitized by Google

sur la dent considérée de la roue O_1 se déplace de I en I'_1 et correspond à un arc II_1 de rotation fourni par la relation :

$$\widehat{II_1} = h_1 \cdot \frac{2\pi R_1}{P_1},$$

h_1 désignant la hauteur de cette roue.

Pour que la transmission de mouvement soit assurée il faut évidemment que le contact se produise sur la seconde dent au moins au moment où il va cesser sur la première, ce qui exige que le pas p de l'engrenage satisfasse à l'inégalité :

$$p \leqslant h_1 \cdot \frac{2\pi R_1}{P_1},$$

de laquelle nous déduisons :

$$P_1 \leqslant h_1 \cdot \frac{2\pi R_1}{p}.$$

Le pas de l'hélice C_1 n'est donc pas tout à fait arbitraire comme nous aurions pu le croire à priori.

b) Le plus souvent, les sections normales faites dans les surfaces des

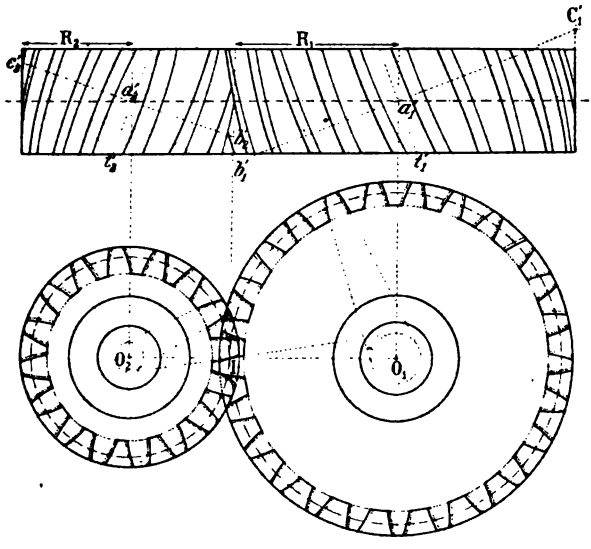


Fig. 104.

dents et qui les déterminent, s'obtiennent comme suit : on coupe les cylindres de friction (fig. 104) par un plan perpendiculaire à la droite qui engendre les hélices directrices des dents et l'on détermine les ellipses de section ; on les suppose en contact par une des extrémités de leurs petits axes et on leur substitue dans le voisinage de ce point

Digitized by Google

les arcs de circonférences qui leur sont osculatrices. On les envisage ensuite comme des arcs de circonférences primitives de roues cylindriques et l'on effectue le tracé des profils (fig. 105) par l'un des procédés connus. En les projetant enfin sur les plans de base parallèlement à la tangente commune aux hélices directrices on obtient les surfaces des dents elles-mêmes : à cause de la faible hauteur des roues, nous pouvons en effet, sans erreur appréciable, substituer aux hélices directrices (C_1) et (C_2) leurs tangentes moyennes.

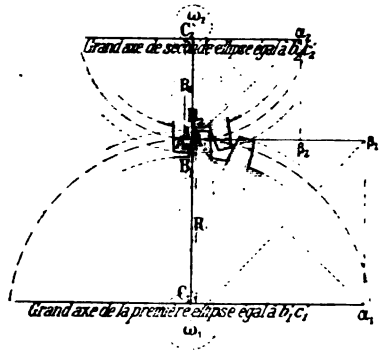


Fig. 105.

Les constructions dont nous venons de parler ont été exécutées sur l'épure ci-contre et elles sont suffisamment simples pour que nous laissions de côté le détail de leur exécution.

73. Engrenage à gradins de Hooke. — L'engrenage de White dont nous venons de parler n'est qu'une généralisation d'un engrenage inventé par Hooke en 1666 en cherchant à réduire le frottement de glissement relatif des dents d'un engrenage cylindrique. La formule établie § 22 montre que l'on peut obtenir ce résultat en rapprochant de la ligne des centres le contact de deux dents en prise ou, ce qui revient au même, en diminuant l'arc de conduite.

Pour satisfaire à cette condition, imaginons deux roues cylindriques à dents droites engrénant ensemble et répondant à un arc de conduite de valeur $\frac{p}{n}$, p désignant le pas de l'engrenage ; puis par des plans perpendiculaires aux arbres (fig. 106), faisons n sections dans chacune d'elles et désignons par $R_1, R'_1, R''_1, R'''_1, \ldots\ldots, R_2, R'_2, R'''_2, \ldots\ldots$, les $2n$ nouvelles roues obtenues ; enfin maintenons fixes les roues $R^{(n)}_1$, $R^{(n)}_2$ et faisons tourner, dans le sens des rotations correspondantes, les roues R^{n-1}_1, R^{n-1}_2 de la quantité $\frac{p}{n}$, les roues R^{n-2}_1, R^{n-2}_2 de la quantité $\frac{2p}{n}$ et ainsi de suite jusqu'au dernier couple. Si alors nous calons les roues ainsi disposées sur leurs arbres respectifs, nous obtenons l'engrenage de Hooke.

Il fonctionne comme suit : La roue O_1 étant supposée menante dans le sens de la flèche f_1, à un certain moment la dent D_1 arrive en contact

Digitized by Google

avec sa conjuguée et conduit pendant une fraction de tour correspondant à l'arc $\frac{p}{n}$; après quoi le contact passe sur la dent D'_1 où il s'exerce pendant une rotation égale à la précédente et ainsi de suite jusqu'à la

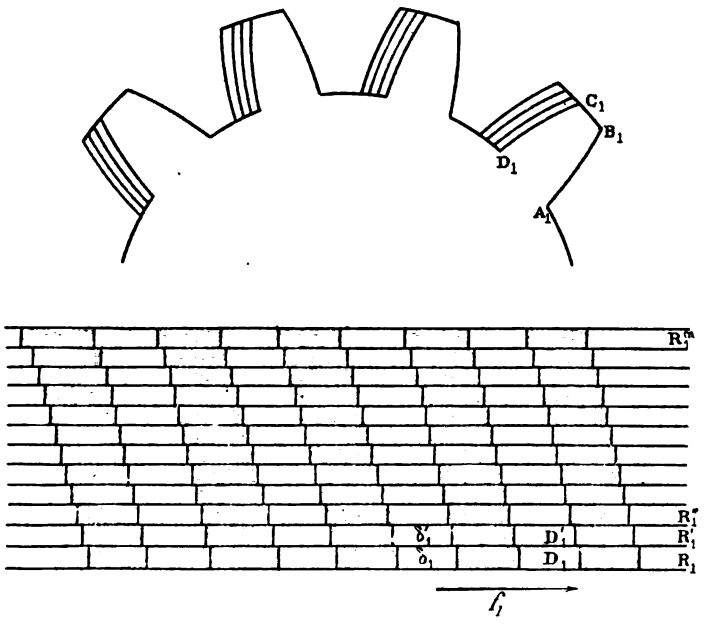


Fig. 106.

dent D_1^n. Comme après ce dernier contact chaque roue a tourné d'un angle correspondant à un pas, le contact sur la roue O_1 passe sur la série de dents δ_1, δ'_1, δ''_1, ... et ainsi de suite.

Remarque. — Si nous faisons croître n indéfiniment, l'épaisseur des tranches devient infiniment petite et l'ensemble des dents D_1, D'_1, D''_1,...., $D^{(n)}_1$, devient un filet de vis que nous pouvons engendrer par le déplacement hélicoïdal de l'aire $A_1B_1C_1D_1$... ; nous retrouvons ainsi l'engrenage de White décrit précédemment.

74. Roues chevronnées. — *a) Roues à simples chevrons.* — Les raisonnements qui précèdent ont établi l'obliquité sur les axes de rotation du plan tangent commun à deux dents en prise et par suite l'inclinaison sur chacun d'eux de la pression normale qui s'exerce en leur point de contact. Considérée comme résultante de vecteur, cette

Digitized by Google

dernière donne naissance à deux forces dont l'une, parallèle aux arbres, occasionne une forte pression contre les coussinets des paliers.

Pour remédier à cet inconvénient (fig. 103), on adjoint à la roue O_2 une seconde roue O'_2 qui lui est égale et qui porte des dents symétriques des précédentes par rapport à leur base commune et l'on opère de même sur la roue O_1. Sur chaque couple de dents en prise du nouvel engrenage qu'on détermine ainsi se trouvent à chaque instant deux points de contact : l'un appartient aux roues O_1, O_2 ; l'autre aux

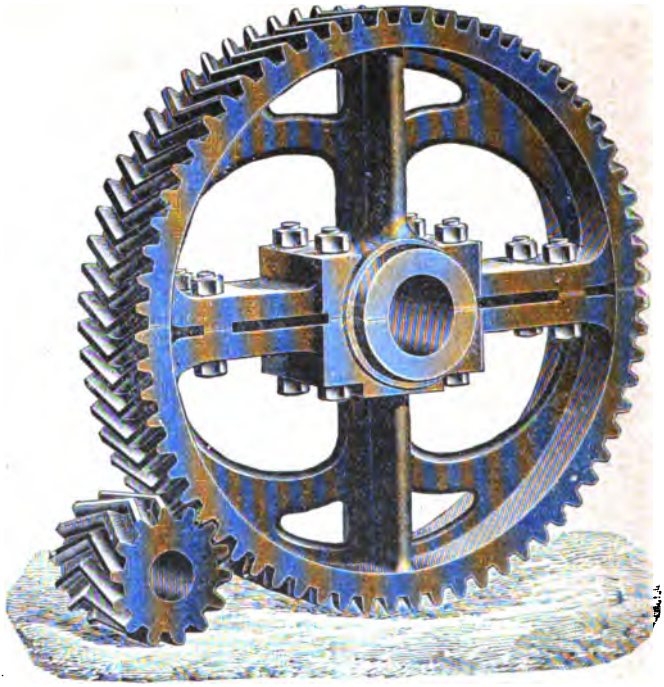


Fig. 107.

roues O'_1, O'_2, et par suite de la symétrie dont nous venons de parler, la composante parallèle aux arbres de l'action des deux premières est égale et de sens contraire à la même composante relative à l'action des deux autres. De ce fait la pression parallèle aux arbres disparaît en même temps que l'inconvénient signalé précédemment.

b) Roues à doubles chevrons. — Il existe aujourd'hui des roues à doubles et à multiples chevrons (fig. 108), taillées sur machines automatiques et qui présentent l'avantage d'être plus résistantes que les précédentes puisqu'à chaque nouveau chevron correspondent deux nouveaux points de contact. C'est pourquoi, depuis plusieurs années, elles

Digitized by Google

ont trouvé un gros débouché dans l'industrie, principalement dans toutes les commandes par électro-moteurs.

Fig. 108.

75. Engrenage « Kosmos » à chevrons fraisés d'une seule pièce. — Ces roues (fig. 109) forment actuellement la partie la plus importante et certainement la plus intéressante de la fabrication

Digitized by Google

d'engrenages cylindriques de la maison Piat qui a eu l'obligeance de les porter à notre connaissance.

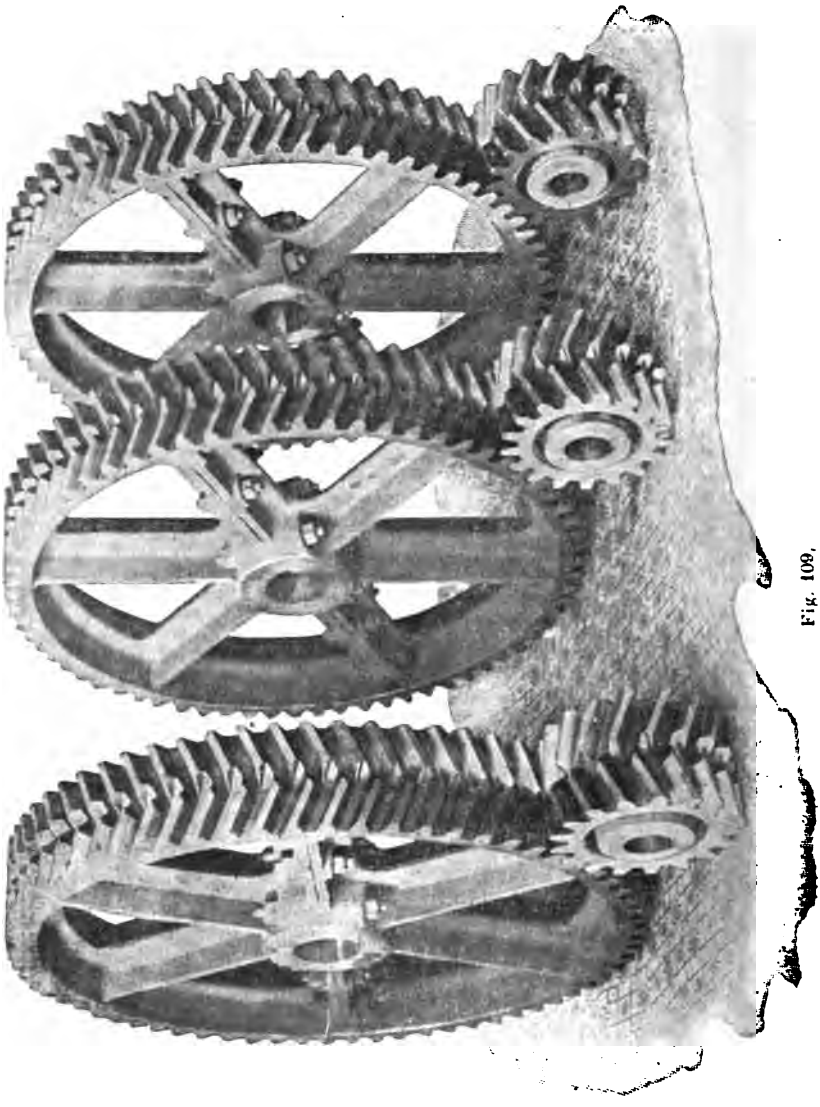


Fig. 109.

La gravure ci-contre montre la forme originale autant qu'avantageuse de cette denture spéciale bien différente de celle employée jusqu'à ce jour où les roues étaient en deux parties assemblées par boulons, assemblage qui présentait une difficulté extrême pour obtenir

Digitized by Google

un raccordement mathématique des ailes du chevron. Elle est taillée hélicoïdale sur l'une des moitiés de la largeur de la roue ; sur l'autre, hélicoïdale également, elle est taillée suivant une inclinaison inverse et avec cette particularité que les dents de l'une des moitiés sont intercalées exactement dans les creux de l'autre.

Par suite de cette disposition ces nouveaux engrenages possèdent à un haut degré les avantages suivants :

1° Le roulement est plus doux qu'avec le chevron ordinaire, même taillé ;

2° Ils fonctionnent presque comme des frictions planes et peuvent pratiquement rouler sans chocs ni trépidations aux plus grandes vitesses, c'est-à-dire, atteindre sans danger 15 à 18 mètres par seconde.

B. Engrenages coniques hélicoïdaux.

76. — Lorsqu'il s'agit de transmettre un mouvement de rotation d'un arbre à un autre concourant avec lui, on arme de dents deux certains cônes appelés cônes de friction et déterminés par les considérations exposées § 54. Comme ce genre de transmission n'est d'ailleurs que la généralisation du précédent, nous n'entrerons pas dans le détail de sa théorie ; nous nous contenterons tout simplement de généraliser les résultats auxquels nous sommes parvenus.

77. Recherche des courbes lieux des contacts des dents. — Soient (fig. 110) OX_1, OX_2, les axes de rotation et OI la génératrice commune des cônes de friction calés sur chacun d'eux. Sur le cône OX_1, traçons une courbe arbitraire (C_1) et marquons sur le cône OX_2 l'empreinte (C_2) qu'elle laisse lorsque le cône auquel elle appartient roule sur l'autre ; nous obtenons ainsi deux courbes que nous pouvons regarder comme les lieux des points de contact d'un couple de dents en prise sur chacun des cônes de friction.

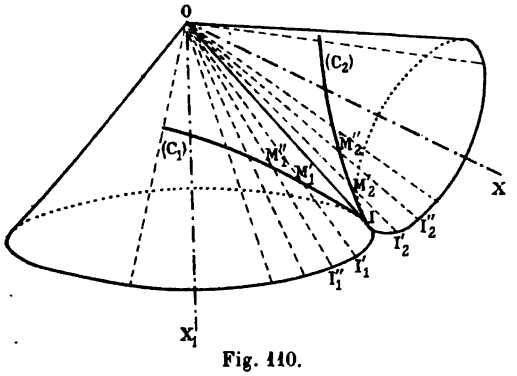


Fig. 110.

Digitized by Google

Si, en particulier, nous voulons celles qui correspondent aux hélices de la théorie précédente, nous partageons la circonférence de base du cône OX_1 en p parties égales et nous désignons par I, I'_1, I''_1, ... les points de division obtenus ; nous portons ensuite sur la circonférence de base du cône OX_2 des arcs $\widehat{II_2}$, $\widehat{II'_2}$, $\widehat{II''_2}$, ... respectivement égaux aux arcs $\widehat{II_1}$, $\widehat{II'_1}$, $\widehat{II''_1}$, ... et nous joignons les points de division obtenus au point O. Après quoi, nous divisons la génératrice OI en k parties égales et nous déterminons sur le couple de génératrices homologues $OI_1^{(h)}$, $OI_2^{(h)}$, des points $M_1^{(h)}$, $M_2^{(h)}$ tels que :

$$I_1^{(h)} M_1^{(h)} = I_2^{(h)} M_2^{(h)} = h \frac{OI}{k} = hl.$$

En donnant ensuite à h les valeurs 1, 2, 3, ..., puis joignant par des traits continus les points M'_1, M''_1, ..., d'une part, les points M'_2, M''_2, ..., d'autre part, nous obtenons les courbes cherchées.

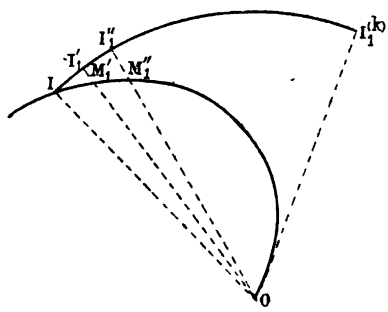


Fig. 111.

Leurs transformées sont des *spirales d'Archimède*. Développons, en effet, le cône OX_1 sur le plan qui lui est tangent suivant la génératrice OI et désignons, (fig. 111), par $IM'_1M''_1$... la transformée de la courbe (C_1). Elle est telle que :

$$\widehat{II'_1} = \widehat{I'_1 I''_1} = \cdots\cdots$$

$$\overline{I'_1 M'_1} = l, \quad \overline{I''_1 M''_1} = 2l \ldots\ldots$$

Si donc, nous prenons le point O comme pôle et la droite $OI_1^{(k)}$ pour axe polaire, les coordonnées polaires des points $M_1^{(k1)}$, $M_1^{(k2)}$, ..., ont pour expressions : (l, θ), $(2l, 2\theta)$, ... Elles satisfont donc aux relations :

$$\frac{l}{\theta} = \frac{2l}{2\theta} = \cdots\cdots$$

qui justifient la propriété énoncée.

Digitized by Google

78. Surface des dents. — Les surfaces des dents s'obtiennent en généralisant les considérations exposées § 72.

79. Roues à simples, doubles, ... chevrons. — Comme dans le

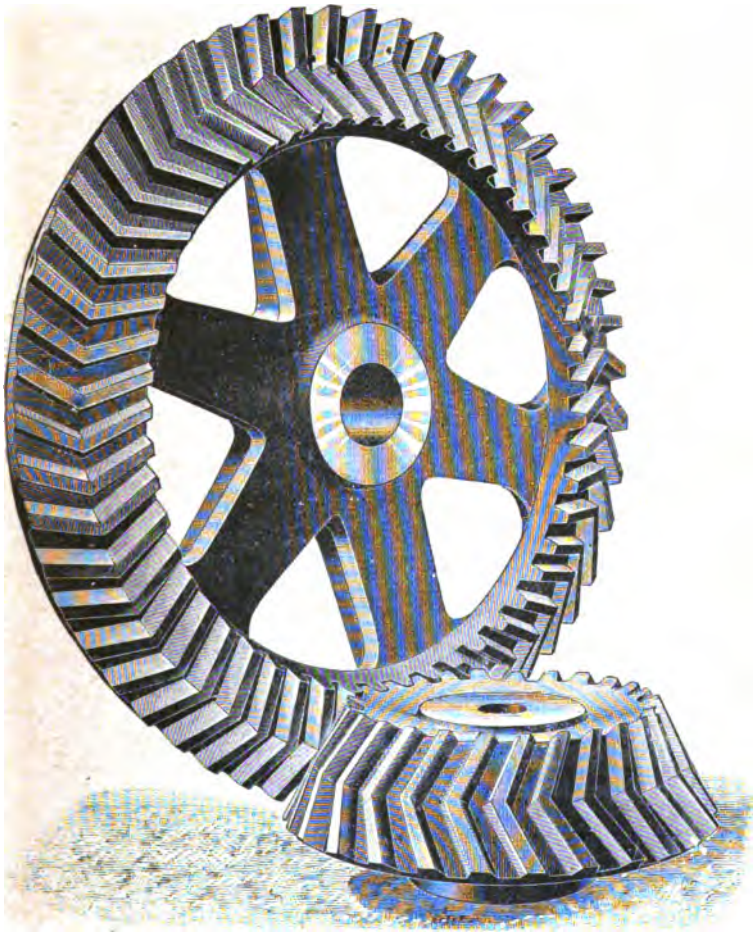


Fig. 112.

cas des roues cylindriques, il existe des roues coniques à simples, doubles et multiples chevrons. La figure ci-contre se rapporte à une roue à simples chevrons et la suivante à une roue à doubles chevrons.

Digitized by Google

Fig. 113.

80. Roue conique à gradins. — La roue conique hélicoïdale est un cas particulier de la roue conique à gradins représentée

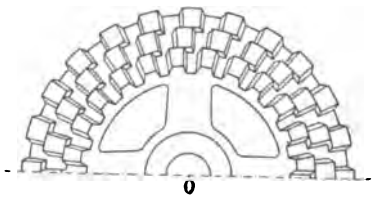


Fig. 114.

(fig. 114). Elle montre que le pas, variable d'un étage au suivant, va en diminuant au fur et à mesure qu'on se rapproche du sommet O.

Digitized by Google

C. Engrenages hyperboliques hélicoïdaux.

81. — Dans le cas où les axes de rotation ne se rencontrent pas, les surfaces primitives qui permettent de transmettre le mouvement de rotation de l'un à l'autre sont deux hyperboloïdes de révolution engendrés par la rotation autour de chacun d'eux d'une certaine droite IJ dont nous avons déterminé la position § 66.

82. Courbes lieux des points de contact des dents. — Sur l'hyperboloïde H_1 calé sur l'arbre X_1Y_1, traçons une courbe quelconque (C_1) et cherchons son empreinte (C_2) sur l'hyperboloïde H_2 calé sur l'arbre X_2Y_2, lorsque les rotations des deux arbres se produisent. Les deux courbes que nous déterminons ainsi peuvent être prises pour directrices des surfaces d'un couple de dents en prise et comme lieux de leurs points de contact sur chacune des surfaces primitives de l'engrenage.

Pratiquement, les zones d'hyperboloïdes que l'on conserve avoisinent les cercles de gorge et peuvent être assimilées à des cylindres de révolution tangents entre eux au point I. Dans ces conditions, les deux courbes (C_1) et (C_2) peuvent s'obtenir par le déplacement communiqué à une certaine droite IZ du plan tangent commun aux deux surfaces précédentes lorsqu'on l'enroule successivement sur chacune d'elles.

Les surfaces des dents s'obtiennent ensuite comme nous l'avons indiqué § 72.

83. Définitions. — Faisons une projection des deux cylindres sur leur plan tangent commun en I et désignons par γ l'angle des axes X_1Y_1, X_2Y_2 de rotation, par IZ la droite qui engendre les hélices directrices des dents et par θ_1 et θ_2 les angles qu'elle fait avec ces axes.

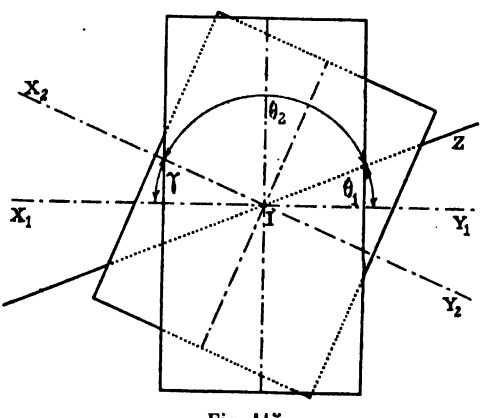


Fig. 115.

Si pour fixer les idées, nous supposons tous ces angles comptés dans un même sens, ils satisfont alors à la relation :

$$\theta_1 + \theta_2 + \gamma = 180°.$$

Digitized by Google

α) *Pas suivant l'axe, pas dévié.* — Sur le cylindre C_1 d'axe X_1Y_1, traçons N_1 filets de vis et supposons que l'hélice moyenne, appartenant à l'un deux, coupe une même génératrice en deux points consécutifs a_1

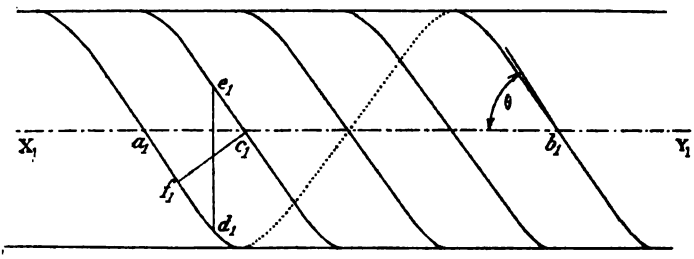


Fig. 116.

et b_1. Le segment de génératrice a_1b_1 mesure alors *le pas de l'engrenage suivant l'axe* et celui a_1c_1 compris entre deux hélices moyennes consécutives *le pas dévié.*

β) *Pas circonférentiel.* — On nomme *pas circonférentiel* C_1, l'arc d_1e_1 de section droite du cylindre X_1Y_1 compris entre deux filets consécutifs. En fonction du rayon R_1 de ce cylindre et du nombre N_1 de ses filets, il a pour expression :

$$C_1 = \frac{2\pi R_1}{N_1}.$$

γ) *Pas normal.* — Considérons une section faite dans le cylindre X_1Y_1 par un plan perpendiculaire au point c_1 à l'hélice moyenne qui passe par ce point ; l'arc c_1f_1 de cette section obtenue, compris entre deux filets consécutifs, porte le nom de *pas normal* ; nous le désignerons par la lettre n_1 dans tout ce qui va suivre et nous allons rechercher de suite son expression en fonction de l'angle θ_1 et du pas circonférentiel C_1.

A cet effet, remarquons que la théorie même de l'hélice nous permet d'écrire :

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{2\pi R_1}{p} = \frac{2\pi R_1}{p_1 N_1} = \frac{C_1}{p_1}.$$

D'autre part, la considération du triangle rectangle $a_1c_1f_1$ donnant la relation :

$$n_1 = p_1 \sin\theta_1,$$

l'élimination de p_1 entre cette équation et la précédente nous conduit à la relation cherchée. Elle peut s'écrire :

$$n_1 = C_1 \cos\theta_1.$$

Digitized by Google

84. Calculs des différents éléments d'un engrenage hélicoïdal. — Relativement au cylindre X_2Y_2, désignons par N_2, p_2, c_2, n_2, les éléments que nous venons de définir et proposons-nous de déterminer les éléments qui permettent de construire un engrenage hélicoïdal, dans le cas où l'on connaît l'angle γ des axes, le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ des vitesses angulaires des arbres et une relation entre C_1 et C_2.

α) *Calcul de* R_1 *et* R_2. — Dans la théorie des engrenages hyperboloïdes, nous avons calculé § 66, les rayons R_1 et R_2 des cylindres primitifs ; ils correspondent aux rayons des cercles de gorge des hyperboloïdes de friction.

β) *Calcul de* C_1 *et* C_2. — Les vitesses du point de contact I des cylindres primitifs, considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre de ces surfaces, ont pour expressions : $\omega_1 R_1$, $\omega_2 R_2$. Leurs projections sur le plan perpendiculaire en I à la droite IZ ont donc pour valeurs : $\omega_1 R_1 \cos\theta_1$, $\omega_2 R_2 \cos\theta_2$ et comme d'après notre construction, elles sont égales, nous pouvons poser l'équation :

$$\omega_1 R_1 \cos\theta_1 = \omega_2 R_2 \cos\theta_2. \qquad (1)$$

D'autre part :

$$n_1 = n_2,$$

et cette relation peut encore s'écrire :

$$C_1 \cos\theta_1 = C_2 \cos\theta_2. \qquad (2)$$

Par suite, si nous divisons membre à membre les équations (1) et (2), nous obtenons entre les inconnues C_1 et C_2 et les données, une première équation :

$$\frac{\omega_1 R_1}{C_1} = \frac{\omega_2 R_2}{C_2}. \qquad (3)$$

Celle fournit par le projet en est une seconde ; adjointe à la précédente, elles permettent de calculer C_1 et C_2.

γ) *Calcul de* N_1 *et* N_2. — Les équations :

$$N_1 = \frac{2\pi R_1}{C_1}, \qquad N_2 = \frac{2\pi R_2}{C_2},$$

fournissent les inconnues cherchées.

Elles peuvent s'écrire :

$$\frac{N_1}{2\pi} = \frac{R_1}{C_1}, \qquad \frac{N_2}{2\pi} = \frac{R_2}{C_2}.$$

Adjointes à l'équation (3), elles conduisent à la relation suivante :

$$\omega_1 N_1 = \omega_2 N_2.$$

Digitized by Google

Elle exprime que, dans un engrenage hélicoïdal, *les vitesses angulaires des arbres de rotation sont inversement proportionnelles aux nombres de filets de chacune des roues,* relation analogue à celle trouvée dans le cas des engrenages cylindriques.

δ) *Calcul de* θ_1 *et* θ_2. — Pour évaluer les angles θ_1 et θ_2, il nous faut poser deux équations, savoir :

$$\theta_1 + \theta_2 + \gamma = 180^\circ,$$

$$C_1 \cos\theta_1 = C_2 \cos\theta_2.$$

Comme nous pouvons regarder dans cette dernière C_1 et C_2 comme des éléments connus, pour les résoudre, nous transportons dans la seconde équation la valeur de θ_2 déduite de la première ; elle devient alors :

$$C_1 \cos\theta_1 = C_2 \cos[180^\circ - (\theta_1 + \gamma)],$$

ou :

$$C_1 \cos\theta_1 = -C_2(\cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1).$$

En faisant passer dans un même membre tous les termes qui renferment $\cos\theta_1$, elle peut s'écrire :

$$C_2 \sin\gamma \sin\theta_1 = \cos\theta_1(C_1 + C_2\cos\gamma),$$

et donne :

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{C_1 + C_2\cos\gamma}{C_2\sin\gamma}.$$

Par un calcul analogue, nous obtenons :

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{C_2 + C_1\cos\gamma}{C_1\sin\gamma}.$$

ε) *Calcul de* n_1 *et* n_2. — Nous avons trouvé § 83 :

$$n_1 = C_1\cos\theta_1, \qquad n_2 = C_2\cos\theta_2.$$

Comme d'autre part, les résultats précédents nous permettent d'écrire :

$$\cos\theta_1 = \frac{C_2\sin\gamma}{\sqrt{(C_1+C_2\cos\gamma)^2 + C_2^2\sin^2\gamma}}, \quad \cos\theta_2 = \frac{C_1\sin\gamma}{\sqrt{(C_2+C_1\cos\gamma)^2 + C^2\sin^2\gamma}}.$$

Il en résulte que :

$$n_1 = \frac{C_1C_2\sin\gamma}{\sqrt{(C_1 + C_2\cos\gamma)^2 + C_2^2\sin^2\gamma}},$$

$$n_2 = \frac{C_1C_2\sin\gamma}{\sqrt{(C_1 + C_2\cos\gamma)^2 + C_2^2\sin^2\gamma}}.$$

ζ) *Calcul de* p_1 *et* p_2. — En remplaçant $\operatorname{cotg}\theta_1$ et $\operatorname{cotg}\theta_2$ par leurs valeurs dans les expressions suivantes :

$$p_1 = C_1\operatorname{cotg}\theta_1, \qquad p_2 = C_2\operatorname{cotg}\theta_2,$$

Digitized by Google

il vient :

$$p_1 = \frac{C_1 C_2 \sin\gamma}{C_1 + C_2 \cos\gamma},$$

$$p_2 = \frac{C_1 C_2 \sin\gamma}{C_2 + C_1 \cos\gamma}.$$

Dans le cas particulier où $\gamma = 90°$,

$$p_1 = C_2 \quad \text{et} \quad p_2 = C_1,$$

autrement dit : *le pas dévié sur l'une des roues est égal au pas circonférentiel sur l'autre roue.*

85. Remarque. — Les vecteurs (IA_1), (IA_2), égaux respectivement à $\omega_1 r_1$, $\omega_2 r_2$, perpendiculaires aux arbres et situés dans le plan tangent commun aux cylindres primitifs, représentent les vitesses du point I considéré comme appartenant à chacune de ces surfaces. Si donc nous désignons par IT la perpendiculaire en I à la droite IZ, la théorie des vecteurs nous permet d'écrire :

$$(IA_1) = (IP_1) + (IR),$$
$$(IA_2) = (IP_2) + (IR).$$

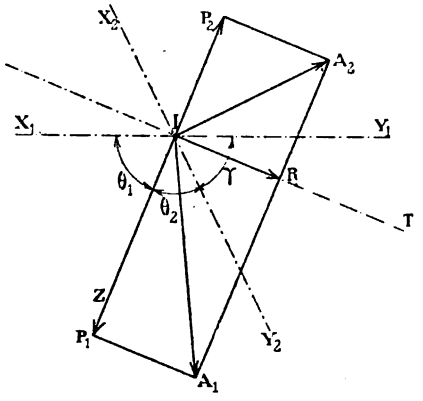


Fig. 117.

Les deux composantes de chacun des vecteurs (IA_1) et (IA_2) suivant la direction IT sont en effet égales puisqu'elles correspondent aux vitesses du point I dans le plan perpendiculaire en I à la droite IZ.

A l'instant considéré, la vitesse relative de glissement du point de contact de deux dents, considéré comme appartenant au second cylindre, a donc pour expression :

$$(IP_1) + (IP_2).$$

Mais comme :

$$IP_1 = IR \operatorname{tg}\theta_1,$$

et que

$$IP_2 = IR \operatorname{tg}\theta_2,$$

elle peut s'écrire :

$$IR(\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2),$$

et comme le frottement de glissement lui est proportionnel et donne

Digitized by Google

lieu à une forte usure, on restreint l'emploi des roues hélicoïdales aux cas où la résistance à vaincre est peu considérable.

En supposant IR constant, la vitesse de glissement est minimum en même temps que

$$\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2.$$

Or :

$$\theta_1 + \theta_2 + \gamma = 180°.$$

Les valeurs de θ_1 et θ_2, répondant à ce minimum, satisfont donc aux équations :

$$\frac{d\theta_1}{\cos^2\theta_1} + \frac{d\theta_2}{\cos^2\theta_2} = 0,$$

$$d\theta_1 + d\theta_2 = 0,$$

qui conduisent à la suivante :

$$d\theta_1\left(\frac{1}{\cos^2\theta_1} - \frac{1}{\cos^2\theta_2}\right) = 0.$$

Elles vérifient par suite l'équation :

$$\cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_2,$$

laquelle est satisfaite pour $\theta_1 = \theta_2$.

Dans un engrenage hélicoïdal le glissement relatif de deux dents est donc minimum lorsque la droite IZ coïncide avec la bissectrice de l'angle des axes.

Suivant les indications données dans l'un des bulletins de la société des anciens élèves des écoles d'arts et métiers, nous avons exécuté quelques épures d'engrenages hélicoïdaux ; elles sont relatives aux cas d'axes inclinés tantôt de 30°, tantôt de 90°.

Digitized by Google

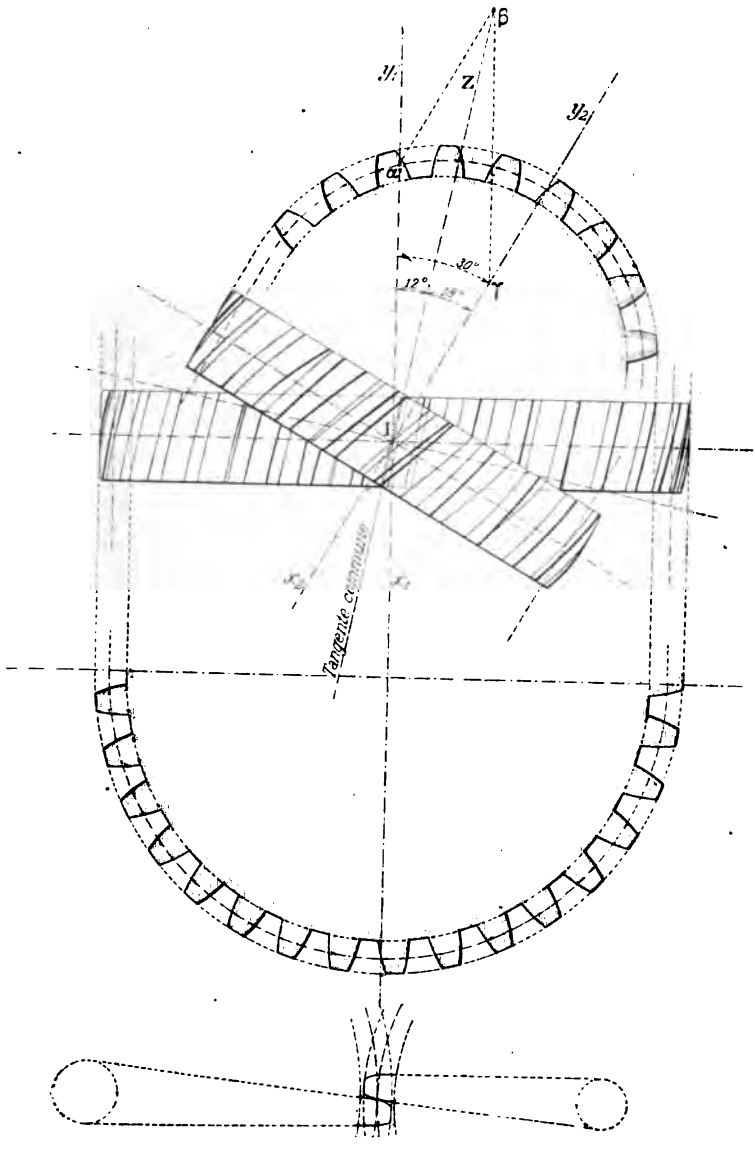


Fig. 118.

Digitized by Google

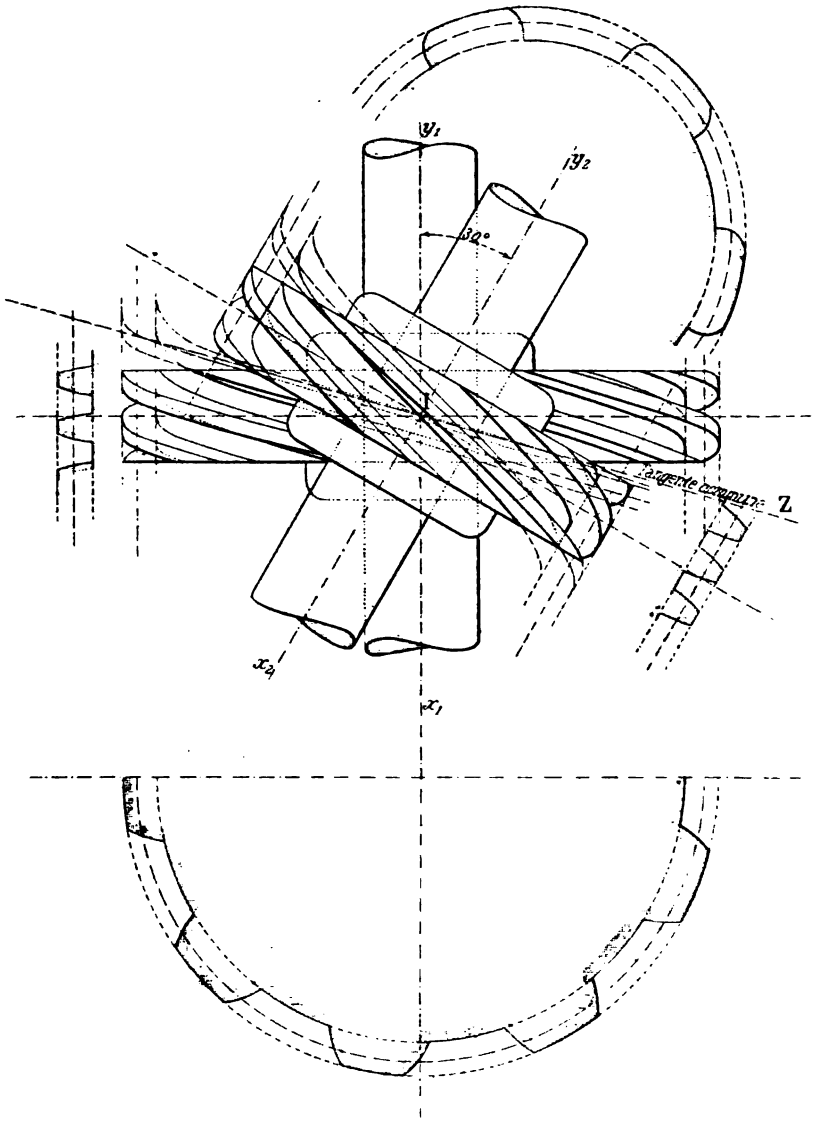


Fig. 119.

Digitized by Google

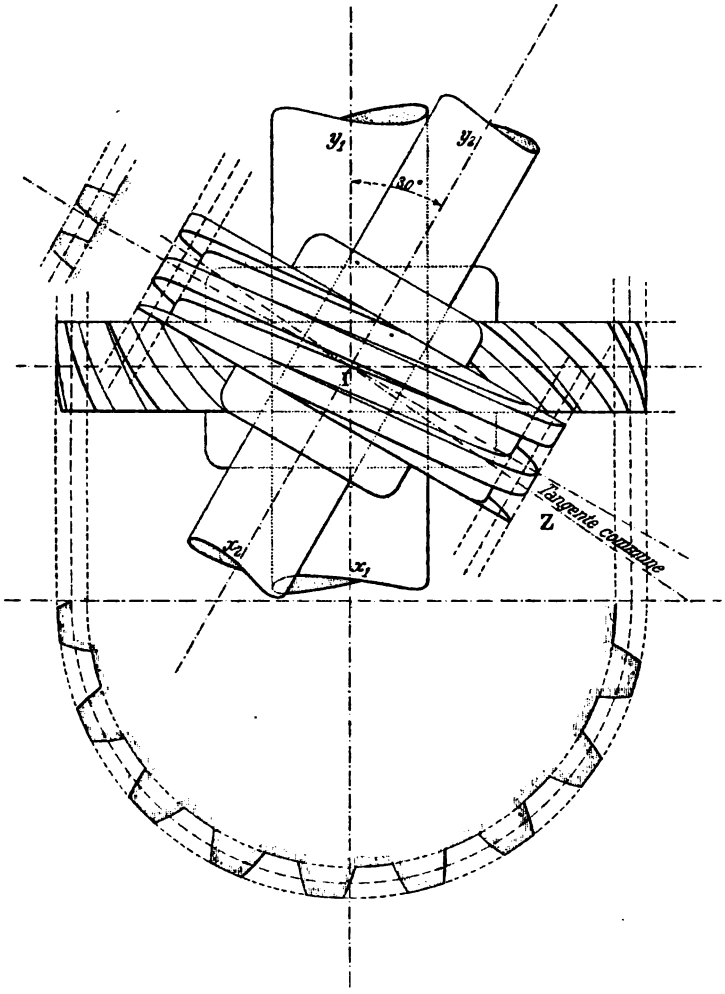


Fig. 120.

Digitized by Google

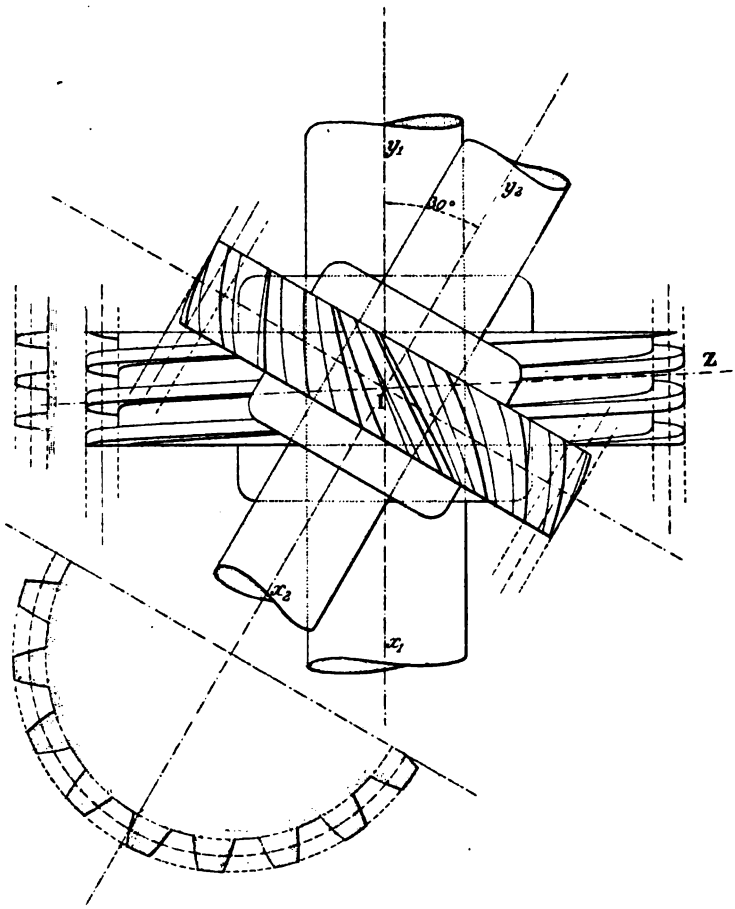


Fig. 121.

Digitized by Google

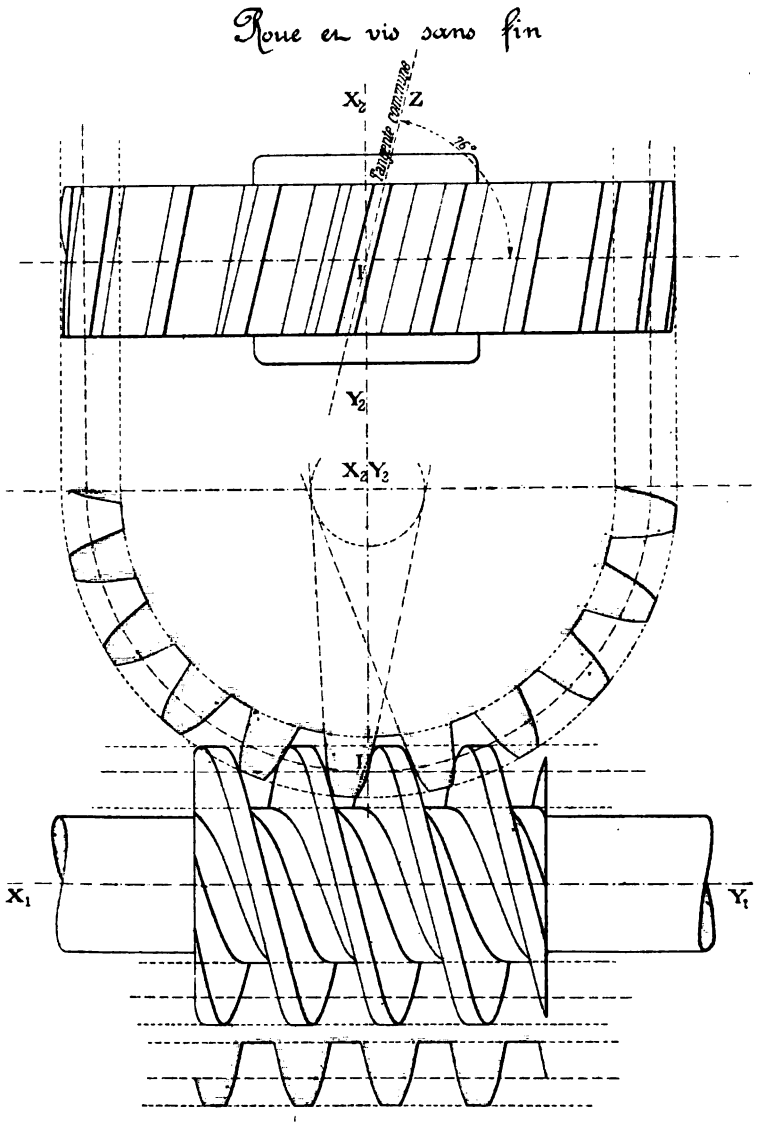


Fig. 122.

Digitized by Google

Roue et vis sans fin

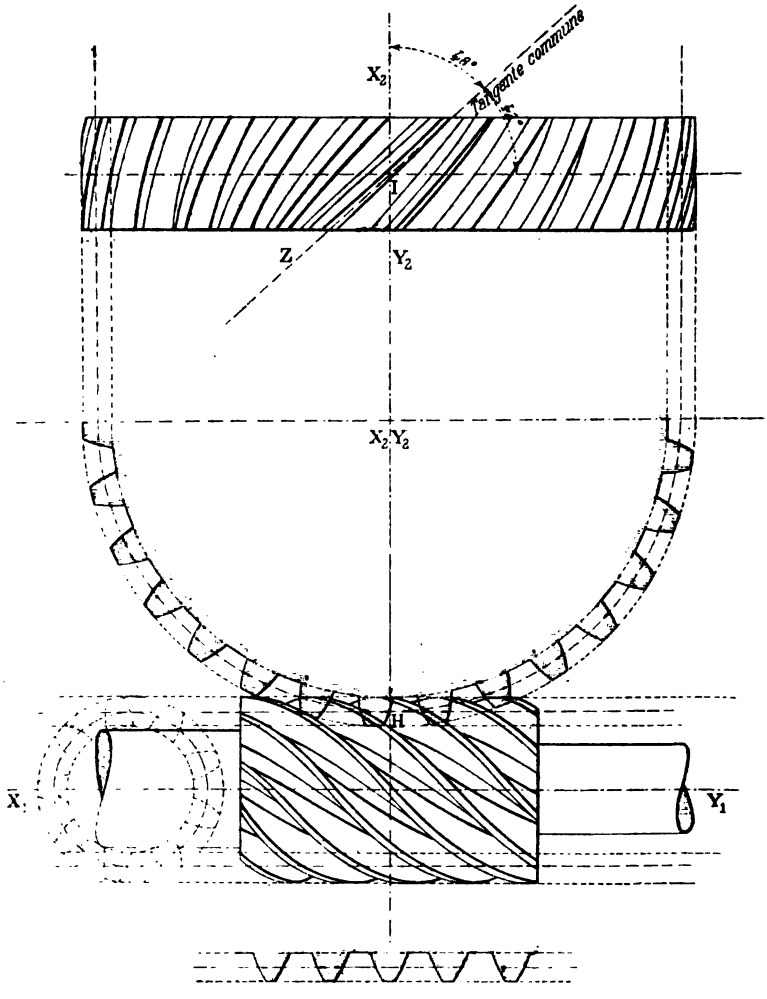


Fig. 123.

Digitized by Google

86. Engrenage d'une roue et d'une crémaillère.

Dans le cas particulier où R_2 est infini, l'axe X_2Y_2 se trouve rejeté à l'infini et la rotation qui lui correspond devient une translation parallèle à la tangente en I à la circonférence primitive du plan moyen de la roue.

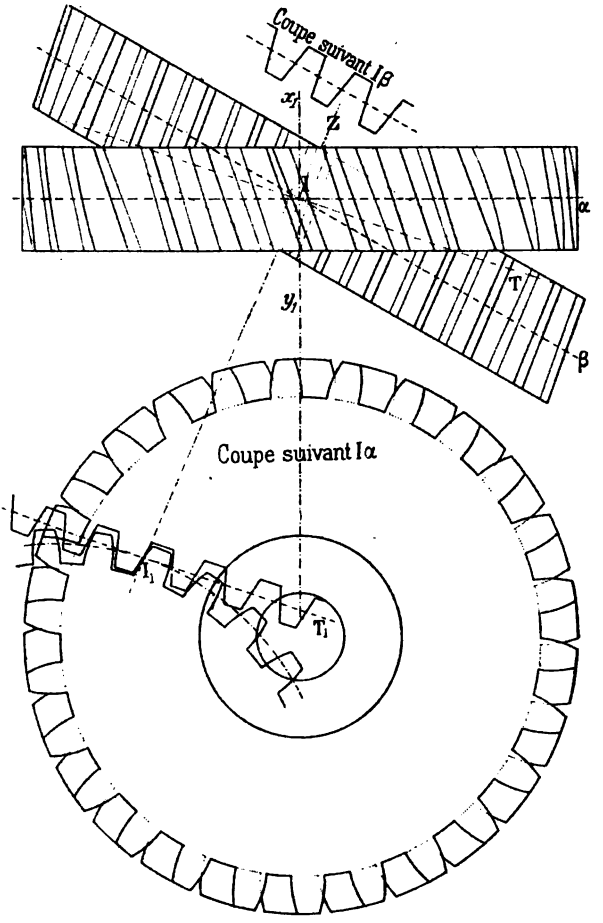


Fig. 124.

L'engrenage correspondant permet alors de transformer une rotation en une translation oblique, les axes de ces deux mouvements ne se rencontrant pas.

Pour l'exécution de l'épure, nous avons fait dans l'engrenage une

Digitized by Google

section par un plan perpendiculaire à la droite IZ ; puis nous avons transporté en I_1T_1 la section déterminée dans la crémaillère, et substitué à l'ellipse obtenue dans la roue la circonférence qui lui est osculatrice au point I.

87. Engrenage de deux crémaillères.

Si nous faisons croître indéfiniment à la fois les deux rayons R_1 et

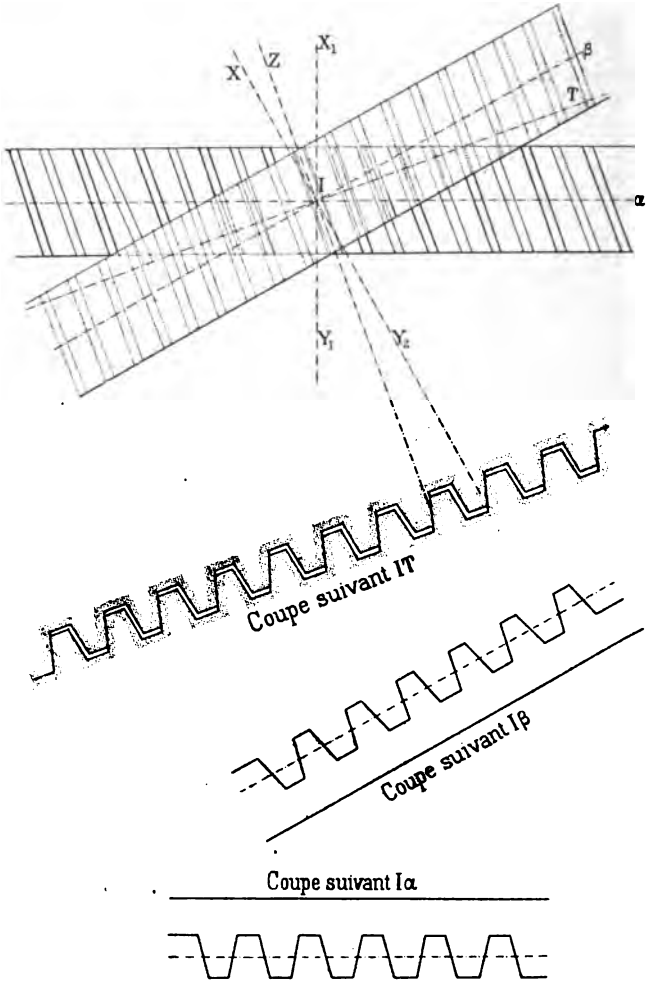


Fig. 125.

R_2, les rotations deviennent des translations ; les roues dégénèrent

Digitized by Google

alors en crémaillères et l'engrenage correspondant a pour objet de transformer une translation en une autre non située dans le même plan.

Sur l'épure ci-contre, X_1Y_1, X_2Y_2 représentent les projections des perpendiculaires aux translations sur un plan parallèle à chacune d'elles et les hélices moyennes sont confondues avec leur tangente commune IZ. Comme dans les exercices précédents, nous avons coupé les plans des deux crémaillères par un plan IT perpendiculaire à IZ et nous avons regardé les droites de section obtenues comme les lignes primitives de deux crémaillères pour lesquelles nous avons effectué l'un des tracés indiqués précédemment. Nous avons ensuite regardé les dents comme des surfaces prismatiques ayant pour directrices les profils que nous venons d'obtenir et pour génératrices des parallèles à la droite IZ.

Digitized by Google

CHAPITRE IX

—

VIS ET ÉCROU. — ROUE ET VIS SANS FIN.

La transmission par vis et écrou repose sur le problème général suivant :

88. Problème. — *Transformer une rotation donnée, d'axe* XY, *de vitesse angulaire* ω *et de sens f, en une translation parallèle de vitesse* V, *par l'intermédiaire de deux corps* A *et* B, *le premier calé sur l'arbre* XY, *le second guidé de façon à ne pouvoir prendre que le mouvement qu'on lui impose et reliés entre eux de manière que le rapport* $\frac{\omega}{V}$ *soit constant.*

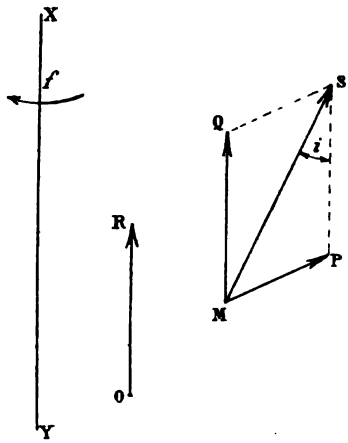


Fig. 126.

Les principes exposés en cinématique théorique § 198 et maintes fois appliqués en cinématique pratique nous montrent, qu'à l'instant considéré, le mouvement relatif du corps B par rapport au corps A résulte d'une translation définie (fig. 126) par le vecteur (OR) = V et d'une rotation d'axe XY, de vitesse angulaire ω et de sens inverse à celui de la flèche *f*.

Ceci posé, prenons un point M de contact des deux corps, distant de l'axe XY de la longueur *r* ; considérons-le comme appartenant au corps B et recherchons sa vitesse par rapport au corps A. D'après ce qui précède, elle coïncide avec la résultante d'un vecteur (MP) égal à ω*r*, de sens inverse à celui de la flèche *f* et perpendiculaire au plan MXY et d'un

Digitized by Google

vecteur (MQ) équipollent à (OR). Elle se confond donc avec l'hypoténuse du triangle rectangle MSP et fait par suite avec l'axe XY un angle i fourni par la relation :

$$\operatorname{tg} i = \frac{MP}{SP} = \frac{\omega}{V} \cdot r.$$

Il est d'ailleurs constant puisque le rapport $\frac{\omega}{V}$ l'est d'après nos hypothèses et que les deux mouvements de rotation et de translation du point M ne changent pas sa distance à l'axe.

Sur le corps A, la trajectoire du point M a donc tous ses points à la même distance de l'axe XY et toutes ses tangentes qui font avec cet axe un même angle ; elle coïncide par suite avec une hélice circulaire.

Si donc nous assurons le guidage du corps B de façon à satisfaire à cette condition, nous aurons résolu le problème posé.

89. Cylindre à rainure conduisant une tige à bouton. — Si nous réduisons le corps A à un cylindre de révolution de rayon r, le corps B guidé, comme l'indique la figure, à une tige ZT munie d'une broche MP terminée par un bouton M qui s'engage dans une rainure hélicoïdale pratiquée sur le cylindre, il suffira de communiquer à ce dernier un mouvement de rotation autour de son axe pour que la tige ZT prenne, d'après le problème précédent, un mouvement de translation qui lui est parallèle.

Sur la figure 127, nous avons supposé les deux axes XY et ZT dans le plan de la feuille de papier.

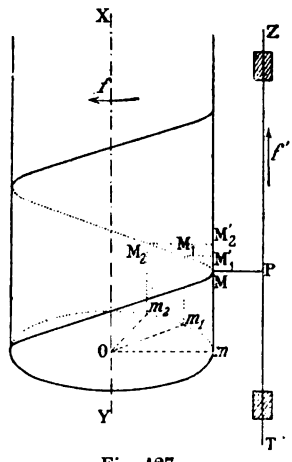


Fig. 127.

90. Problème. — *Sachant que l'axe XY fait* n *tours par minute, déterminer le pas de la rainure hélicoïdale qu'il faut tracer sur le cylindre précédent pour communiquer à la tige un mouvement de translation de vitesse V.*

La broche MP étant constamment dans le plan de la feuille de papier, il en est de même du bouton M. Si donc la rainure hélicoïdale tourne autour de l'axe XY dans le sens de la flèche f, ses points M_1, M_2, ... viennent successivement dans ce plan et y prennent des positions M'_1, M'_2, ... Le bouton M, toujours en contact avec la rainure se déplace donc de M en M'_1, puis de M'_1 en M'_2 et ainsi de suite et la tige ZT reçoit ainsi

Digitized by Google

un mouvement de translation dans le sens de la flèche f'. Il est uniforme, comme nous allons l'établir, si celui de la rainure l'est également.

En effet, si pendant le temps t, la rainure tourne d'un angle mom_1 égal à θ, pendant le temps $2t$ elle tourne d'un angle mom_2 égal à 2θ et les déplacements correspondants MM'_1, MM'_2, du bouton M, ont pour expressions, d'après la théorie de l'hélice :

$$\frac{P}{2\pi} \times \theta, \qquad \frac{P}{2\pi} \times 2\theta.$$

Or, comme par hypothèse, ω désigne la vitesse angulaire de rotation du cylindre, nous pouvons écrire :

$$\theta = \omega \times t.$$

Par suite :

$$MM'_1 = \frac{P}{2\pi} \omega \cdot t,$$

et

$$MM'_2 = \frac{P}{2\pi} \omega \cdot 2t.$$

Ces relations nous montrent que les rapports $\frac{MM'_1}{t}$, $\frac{MM'_2}{2t}$, ... ont une valeur constante $\frac{P\omega}{2\pi}$. Les chemins parcourus par la tige sont donc proportionnels aux temps employés à les parcourir et son mouvement est uniforme. Sa vitesse V a pour expression :

$$V = \frac{P\omega}{2\pi} = \frac{Pn}{60},$$

elle nous conduit à celle :

$$P = \frac{60V}{n},$$

du pas de la rainure à tracer sur le cylindre.

Dans le cas où l'axe de rotation tourne d'un mouvement varié, la tige prend elle-même un mouvement varié et le problème précédent ne se pose plus. La relation à laquelle nous venons de parvenir existe encore, mais à un instant seulement.

91. Tracé mécanique d'une hélice. — Les résultats auxquels nous venons de parvenir nous conduisent tout naturellement au tracé mécanique d'une hélice circulaire. Il suffit, en effet, de communiquer au cylindre à fileter et au chariot porte-outil des mouvements uniformes pour que le bouton M, assimilé à un outil tranchant, trace une vis sur la surface du cylindre. C'est d'ailleurs sur ce principe que repose le tour à fileter dont nous nous occuperons un peu plus loin.

Digitized by Google

92. Remarque. — Si nous traçons sur la surface latérale du cylindre, comme l'indique la figure 128, deux rainures hélicoïdales de même pas, l'une à droite, l'autre à gauche et ayant mêmes extrémités, l'outil après avoir effectué sa course directe, par exemple, revient ensuite à sa position première et nous avons là un mécanisme qui permet de transformer une rotation continue en une translation rectiligne alternative.

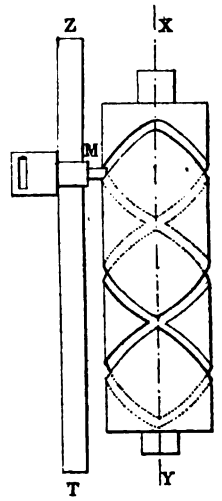


Fig. 128.

TRANSMISSIOM PAR VIS ET PEIGNE.

93. On appelle peigne la section d'un écrou par un plan qui contient son axe.

A la tige précédente ZT, fixons un peigne P et animons-le d'un mouvement hélicoïdal autour de l'axe XY d'un cylindre ; il trace alors sur sa surface une vis qui en tournant, par exemple, dans le sens de la flèche f communique à la tige un mouvement de translation de sens f' : les sections de l'un de ses filets F, par le plan XYZT, vont en effet en s'élevant au fur et à mesure que la rotation se produit.

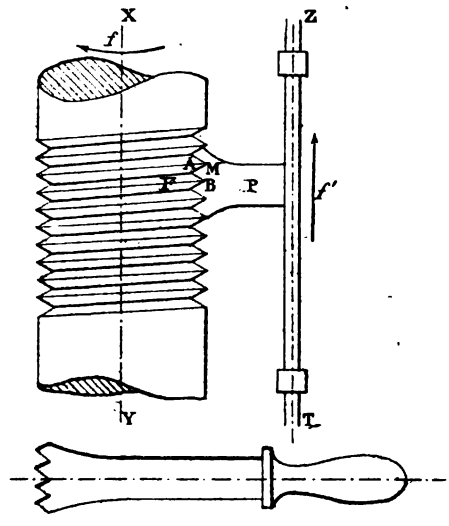


Fig. 129.

Mais comme, en pratique, il est absolument impossible de réaliser un peigne dénué d'épaisseur ; il est naturel de rechercher la nature de la surface qu'on doit donner à ses dents pour assurer la transmission de mouvement.

a) Imposons-nous, par exemple, la condition, qu'à chaque instant, la surface d'un filet F de la vis soit en contact par le même point M avec celle de la dent correspondante du peigne, autrement dit que ces surfaces aient en ce point même plan tangent. Celui relatif à la première étant déterminé par la droite AB et par la tangente au point M à

Digitized by Google

l'hélice que décrit ce point dans le mouvement hélicoïdal du peigne, il suffit d'imposer à la surface de la dent considérée de contenir cette tangente pour que la condition précédente soit satisfaite. La surface des dents du peigne est alors prismatique.

b) La dent du peigne à laquelle nous venons de parvenir étant toujours en contact par le même point M avec le filet de vis correspondant, il en résulte une usure rapide à laquelle on peut remédier en faisant varier à chaque instant la position du point de contact. Il suffit pour cela de tracer sur le filet de vis une courbe quelconque, différente d'une hélice circulaire de même pas que la vis, et de la regarder comme le lieu des points de contact des surfaces en prise. Par suite du mouvement réel, à un moment déterminé, la rotation du cylindre amène l'un quelconque de ses points M_1, par exemple, dans une position M, intersection de la droite AB avec l'hélice circulaire de même pas que la vis qui contient le point considéré, et la tangente M_1T_1 à cette hélice dans la position MT. Si alors nous admettons que cette dernière appartient à la surface de la dent du peigne et si nous répétons un certain nombre de fois cette construction, nous obtiendrons la surface cherchée; elle est réglée, mais ne jouit d'aucune propriété géométrique bien définie.

c) Enfin dans le cas particulier où la surface de la dent du peigne est réciproque de celle de la vis, il y a, à chaque instant, une infinité de points de contact entre les deux surfaces.

Transmission par vis et écrou [1].

94. Si nous généralisons le dernier cas étudié et si nous supposons que le peigne embrasse la vis, nous obtenons deux nouveaux organes de transmission de mouvement connus sous les noms de *vis* et *écrou*. Le mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre étant un mouvement hélicoïdal dont l'axe coïncide avec celui de la vis, ils permettent de réaliser les différentes transformations de mouvement qui suivent :

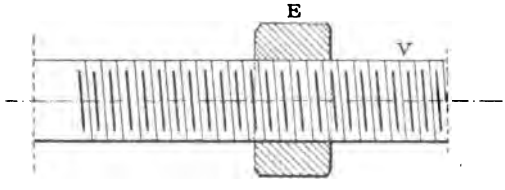


Fig. 130.

a) **L'écrou est fixe.** — Le mouvement hélicoïdal de la vis par rapport à l'écrou étant son mouvement réel, il suffit de faire tourner la vis

1. *Dictionnaire de Mathématiques appliquées de Sonnet.*

Digitized by Google

dans l'écrou pour lui communiquer un mouvement de translation parallèle à son axe. On peut facilement observer ce résultat dans les presses à copier, les vis calantes, etc.

b) **L'écrou ne peut pas tourner.** — La vis est assujettie dans des collets de façon à ne pouvoir prendre qu'un mouvement de rotation autour de son axe et son écrou, guidé lui aussi parallèlement à cet axe, ne peut prendre qu'un mouvement de translation. La rotation de la vis communique alors à l'écrou, toujours d'après le même principe, un mouvement de translation. On observe ce résultat dans les tours à fileter.

c) **L'écrou ne peut que tourner.** — L'écrou ne pouvant prendre qu'un mouvement de rotation autour de son axe communique à la vis un déplacement longitudinal. Cette disposition se rencontre dans les vannes d'anciens moulins. L'une d'elles V (fig. 131) est fixée à l'extrémité d'une vis en bois et reçoit un mouvement de translation par suite de la rotation de son écrou E qui est maintenu constamment en contact avec une traverse AA et qui est mis en mouvement par l'intermédiaire de barres B, B horizontales.

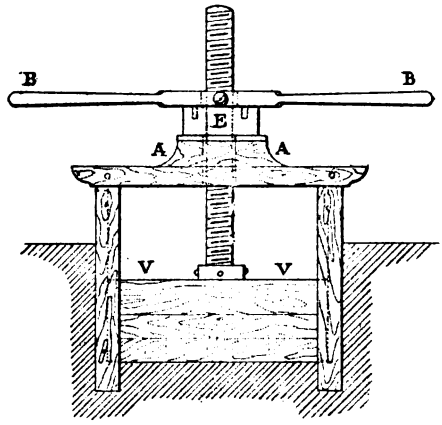


Fig. 131.

On retrouve une disposition analogue dans les lorgnettes de spectacle où les deux oculaires sont invariablement reliés à la vis.

d) **La vis est fixe.** — Si la vis est complètement fixe, l'écrou joue le rôle de *boulon* et il suffit de le mettre en mouvement de rotation pour le rapprocher de la tête de la vis.

Dans l'industrie les vis que l'on rencontre le plus souvent sont : les vis de pression, les vis de rappel, les vis calantes, les vis d'Archimède, les vis différentielles ; nous allons faire l'étude des premières, nous réservant de faire plus tard celle des vis différentielles.

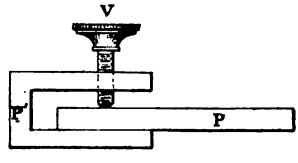


Fig. 132.

95. Vis de pression. — La vis de pression permet de serrer une pièce mobile P contre une pièce fixe P' pour la rendre solidaire de cette dernière. Elle est représentée en V sur la figure 132.

Digitized by Google

96. Vis de rappel. — La vis de rappel, employée dans un grand nombre d'appareils de précision, permet de communiquer un mouvement très lent à une pièce qu'il reste à déplacer infiniment peu. Sur la figure 133, elle est placée en V à l'extrémité d'une alidade A et s'engage dans un écrou E fixe, non solidaire de l'alidade, mais qui peut être invariablement relié au limbe L par une vis de pression V'.

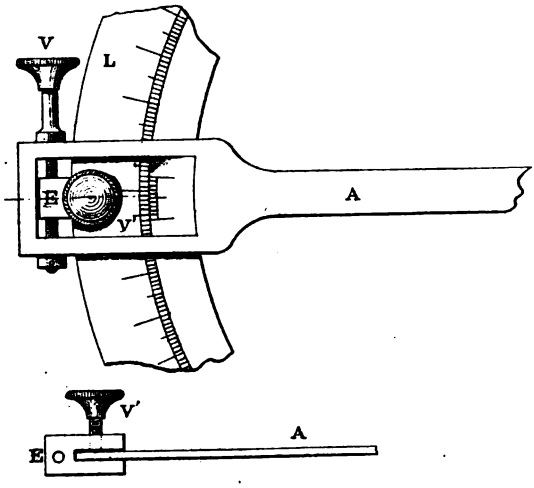


Fig. 133.

Pour déplacer infiniment peu l'alidade A, nous agissons sur la vis V' de manière à réunir le limbe L et l'écrou E ; puis nous mettons la vis V en mouvement de rotation. Par suite de la fixité de l'écrou E, elle se déplace alors parallèlement à son axe, entraîne avec elle l'alidade qu'elle traverse, et amène cette dernière dans la position que nous lui avions assignée.

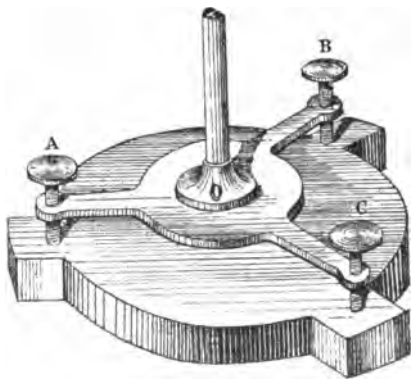


Fig. 134.

97. Vis calantes. — Les vis calantes permettent en général de donner à l'axe d'un instrument une position verticale, en rendant horizontal son support qui lui est perpendiculaire et qui est formé, comme l'indique la figure 134, de trois branches dont les extrémités sont tra-

Digitized by Google

versées par des vis A,B,C. Mises en mouvement de rotation, elles permettent d'élever ou d'abaisser les branches qui leur correspondent et qui jouent le rôle d'écrous. Si donc, nous agissons sur deux d'entre elles, A et B par exemple, de façon que la bulle d'un niveau d'eau, placé successivement sur les branches OA et OB, se place entre ses repaires, nous pourrons conclure que le support de l'instrument est horizontal et l'axe de l'instrument par suite vertical.

98. Vis d'Archimède. — La vis d'Archimède destinée à l'élévation de l'eau ou au transport des matières pulvérulentes est constituée théoriquement par un tube hélicoïdal enroulé sur un cylindre de rayon R dont l'axe est légèrement incliné sur l'horizon.

Pour faire la théorie de ce mécanisme, désignons (fig. 135) par M_1M_2P l'axe du tube hélicoïdal et remarquons que sur chaque spire d'hélice, il existe deux points M_1 et N_1 pour lesquelles les tangentes sont horizontales. Un point matériel placé dans la première position s'y trouve en équilibre instable, tandis que dans la seconde il est en équilibre stable.

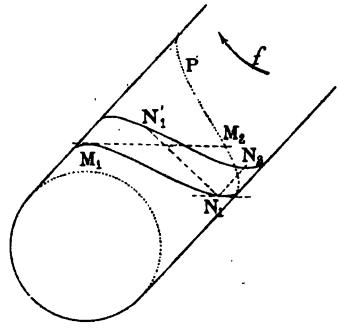


Fig. 135.

Ceci posé, imaginons qu'on mette le cylindre en mouvement et qu'on lui communique un mouvement de rotation infiniment petit autour de son axe et dans le sens de la flèche *f*. Un point matériel placé en N_1 vient alors occuper sur la spire une position N'_1 qui n'est plus celle du point le plus bas ; par suite de l'action de la pesanteur, il ne peut s'y maintenir, glisse le long du tube et vient occuper la position N'_2 où il se trouve en équilibre stable. D'après la composition des mouvements, il a en réalité parcouru le chemin N_1N_2, résultant des deux déplacements $N_1N'_1$ et N'_1N_2. Si donc nous imaginons une molécule d'eau placée à l'intérieur du tube dans les mêmes conditions que ce point matériel, la rotation du cylindre lui communiquant un déplacement longitudinal parallèle à son axe l'oblige à un certain moment à se déverser à la partie supérieure.

L'eau contenue dans chaque spire, limitée aux points M_1 et M_2, fait donner à l'arc $M_1N_1M_2$ d'hélice le nom d'*arc hydrophore*. Pous le déterminer faisons une projection de la figure sur un plan vertical parallèle à l'axe du cylindre et désignons par α et β les angles que fait cette droite avec la surface libre du liquide à transvaser et avec les tangentes à l'hélice. Puis, par le point $(a.a')$ (fig. 136), menons une parallèle à la tangente

Digitized by Google

$(dt, d't')$ à l'hélice ; déterminons ensuite son point de rencontre $(s \,.\, s')$ avec l'axe du tube et regardons-le comme le sommet du cône directeur des tangentes à cette courbe. Le plan horizontal H'_1, mené par son sommet, le coupant suivant deux génératrices $(sb,\ s'b')$, $(sc \,.\, s'c')$, les extrémités m_1 et n_1 des rayons om_1 et on_1 respectivement perpendiculaires à oc et à ob sont les projections horizontales des points $(m_1 \,.\, m'_1)$ et $(n'_1 \,.\, n'_1)$ cherchés. La tangente au point $(m_1 \,..m'_1)$ recoupe la spire d'hélice sur laquelle se trouve ce point au point $(m'_2 \,.\, m'_2)$ et l'arc projeté verticalement en $m'_1 n'_1 m'_2$ correspond à l'arc hydrophore.

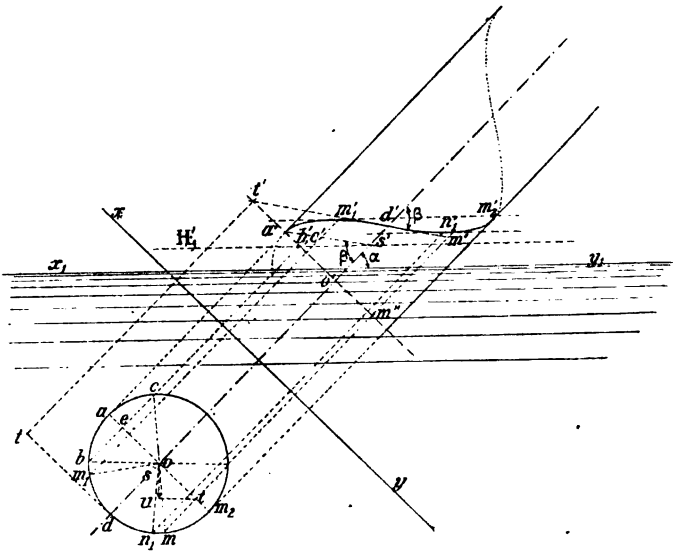


Fig. 136.

99. Calcul de la longueur d'un arc hydrophore. — Pour déterminer la longueur l de l'arc hydrophore $M_1N_1M_2$, désignons par θ_1 et θ_2 les angles $\widehat{aom_1}$ et $\widehat{aom_2}$. Nous pouvons alors écrire :

$$\widehat{m_1om_2} = \theta_2 - \theta_1,$$

et par suite :

$$\widehat{m_1m_2} = R(\theta_2 - \theta_1).$$

La longueur l étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un angle aigu est égal à β et dont le côté opposé a pour valeur $R(\theta_2 - \theta_1)$, a pour expression :

$$l = \frac{R(\theta_2 - \theta_1)}{\sin \beta}. \qquad (1)$$

Si donc les angles θ_2 et θ_1 étaient connus le problème serait résolu.

Digitized by Google

a) Calcul de θ_1. — Pour déterminer l'angle θ_1, considérons le triangle rectangle *oec*; il donne :

$$oe = R \sin \theta_1. \qquad (2)$$

D'autre part, la considération des triangles rectangles $s'o'c'$, $s'o'a'$, conduisant aux équations :

$$oe = o's' \operatorname{tg} \alpha,$$

$$R = o's' \operatorname{tg} \beta,$$

nous en déduisons :

$$oe = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta},$$

et l'équation (2) peut s'écrire :

$$\sin \theta_1 = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \beta.$$

Le produit $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$ doit donc être inférieur à l'unité ce qui exige que l'angle α soit plus petit que l'angle β, autrement dit, que l'axe du cylindre soit moins incliné sur l'horizon que sur les tangentes à l'hélice.

b) Calcul de θ_2. — Soient $(m \,.\, m')$ un point quelconque de l'hélice considérée, θ l'angle $\widehat{aom}$ qui lui correspond. Sa distance z au plan horizontal qui contient le point (o, o') peut être regardée comme la projection sur la verticale du vecteur (OM), résultante du contour O*m*M. Par suite :

$$\text{Proj. (OM)} = \text{Proj. (O}m\text{)} + \text{Proj. (}m\text{M)}.$$

Pour projeter le vecteur (O*m*) sur la verticale du point O d'après le théorème des trois perpendiculaires, nous le projetons en (*ot*) sur le plan de front *oa* qui contient l'axe du cylindre, puis nous projetons ensuite le vecteur (*ot*) en (*ou*) sur la verticale considérée. Nous avons alors :

$$\text{Proj. (O}m\text{)} = R \cos \theta \cos \alpha.$$

Pour trouver la valeur de la projection du vecteur (*m*M), nous remarquons qu'elle peut s'écrire :

$$\text{Proj. } m\text{M} = \text{Proj. } mm' = (mm'' + m''m') \sin \alpha.$$

Comme d'autre part la longueur $m''m'$, différence d'ordonnées de deux points d'une hélice, a pour expression :

$$m''m' = R\theta \operatorname{cotg} \beta.$$

Celle de la distance z cherchée est par suite :

$$z = R \cos \theta \cos \alpha + (mm'' + R\theta \operatorname{cotg} \beta) \sin \alpha.$$

Digitized by Google

Si à l'angle θ, nous substituons dans cette relation les valeurs θ_1 et θ_2, nous obtenons les distances des points M_1 et M_2 au plan horizontal précité ; comme elles sont égales la relation qui lie ces angles peut s'écrire :

$$R\cos\theta_1\cos\alpha + (mm'' + R\theta_1\operatorname{cotg}\beta)\sin\alpha = R\cos\theta_2\cos\alpha + (mm'' + R\theta_2\operatorname{cotg}\beta)\sin\alpha,$$

ou :

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = (\theta_2 - \theta_1)\operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\alpha.$$

Mais, comme d'après un calcul précédent

$$\sin\theta_1 = \operatorname{cotg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha,$$

elle devient finalement :

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = (\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_1.$$

Cette équation permet de calculer θ_2 en fonction de l'angle θ_1 déterminé

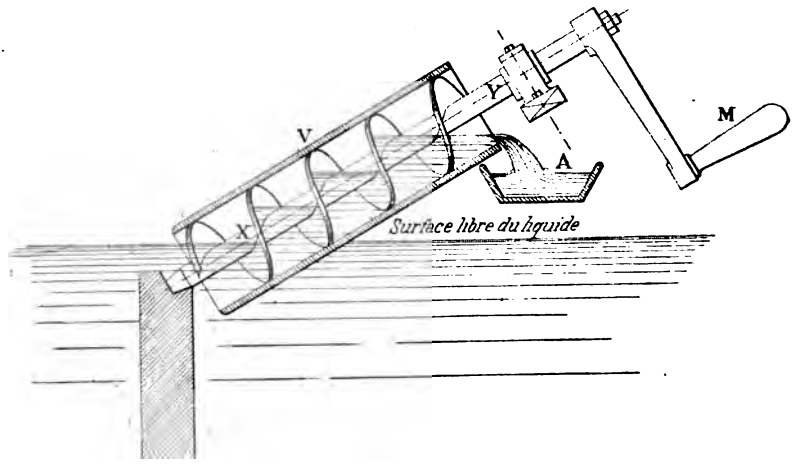


Fig. 137.

précédemment. Elle est transcendante et n'a entre θ et 2π que deux racines : l'une $\theta_2 = \theta_1$; l'autre comprise entre $\pi - \theta_1$ et 2π, permet de trouver la longueur de l'arc hydrophore.

Pour que cet arc conserve sa valeur, il est nécessaire que l'air puisse pénétrer à l'intérieur du tube et que ses deux extrémités soient soumises à la pression atmosphérique. Nous obtenons facilement ce résultat en juxtaposant quelques tubes hélicoïdaux et en supprimant les parties communes à deux tubes consécutifs. La vis qui en résulte présente alors la disposition indiquée par la figure 137.

Dans le cas d'un tube en hélice, l'extrémité inférieure doit plonger

Digitized by Google

successivement dans l'eau et dans l'air : dans l'eau pour que ce liquide s'introduise dans l'arc hydrophore ; dans l'air pour que ce gaz fasse séparation entre deux arcs hydrophores consécutifs.

Roue et vis sans fin.

100. L'engrenage roue et vis sans fin permet de transformer avec un rapport de vitesses angulaires constant une rotation continue en une autre rotation également continue et perpendiculaire à la première. C'est donc une généralisation du mécanisme étudié précédemment car en cinématique théorique nous avons établi qu'une translation était un cas particulier d'une rotation.

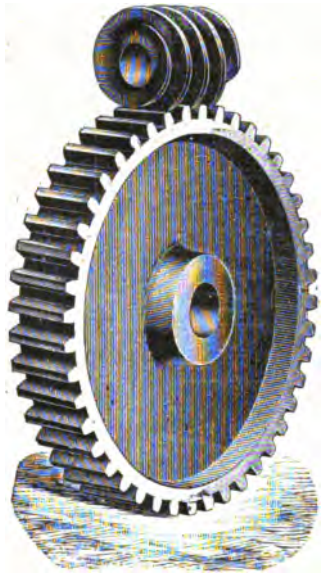


Fig. 138.

101. Recherche de la vis et de la roue. — Pour réaliser la transformation de mouvement demandée, nous pourrions suivre la méthode générale et avoir recours à un engrenage hélicoïdal, comme nous l'avons fait figure 122, mais nous préférons suivre le procédé plus particulier suivant :

Du pied O (fig. 139) de l'axe de la roue sur un plan qui lui est perpendiculaire et qui contient l'axe XY de la vis, nous abaissons la perpendiculaire OP sur cette dernière droite et nous prenons sur elle un point arbitraire I par lequel nous faisons passer la parallèle ZZ′ à l'axe XY et la circonférence de centre O. Puis, regardant ces deux lignes comme lignes primitives d'un pignon et d'une crémaillère, nous effectuons la recherche des profils des dents de ces deux organes par l'un des tracés indiqués dans la théorie correspondante. Toutefois, si nous voulons nous rapprocher des vis de l'industrie, nous faisons choix du tracé à développantes qui donne aux dents de la crémaillère des profils rectilignes et nous distinguons deux cas :

a) *Vis à filets triangulaires.*

Si le profil rectiligne tracé est incliné sur l'axe ZZ′ de la crémaillère,

Digitized by Google

en l'animant d'un mouvement hélicoïdal de pas Np, p désignant le pas de l'engrenage relatif au pignon et à la crémaillère, nous engendrons une vis à filets triangulaires, à droite, par exemple, comme l'indique la figure 139.

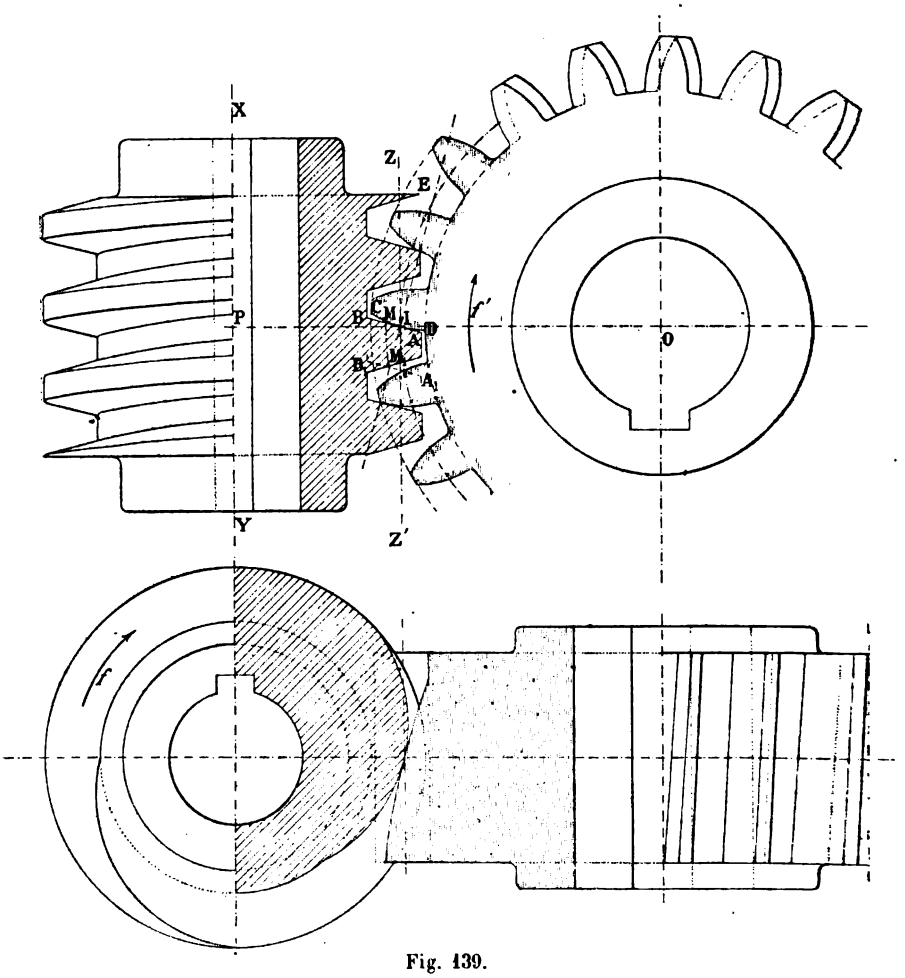


Fig. 139.

Si nous la faisons tourner dans le sens de la flèche f avec une vitesse angulaire ω, les sections faites par le plan de la figure dans un même filet, celui, par exemple, qui est engendré par le côté AB, allant en s'élevant, le profil AB pousse son conjugué CD dans le sens de la flèche f' et oblige la roue O à se mettre en mouvement dans ce même sens avec une vitesse angulaire ω' liée à la précédente par une relation que nous allons établir.

Digitized by Google

Supposons, à cet effet, qu'à l'époque t la dent AB occupe la position indiquée sur la figure et désignons par $d\theta$ l'angle dont tourne la vis pendant le temps suivant dt. Par définition même, nous avons :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Mais, comme pendant ce même temps, d'après la théorie relative aux vis et écrous, la dent AB s'élève de la quantité $\frac{Np}{2\pi}\,d\theta$, la vitesse V de translation de la crémaillère a pour expression :

$$V = \frac{Np}{2\pi} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{Np}{2\pi} \cdot \omega.$$

D'autre part, en désignant par R′ le rayon de la roue, la théorie des pignons et crémaillère nous conduit à la suivante :

$$V = \omega' \cdot R'.$$

Les vitesses angulaires ω et ω' sont donc liées par l'équation :

$$\frac{Np}{2\pi} \cdot \omega = \omega' \cdot R',$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{Np}{2\pi} \cdot \omega = \omega' \frac{Z'p}{2\pi},$$

en introduisant le nombre Z′ de dents du pignon, ou bien encore :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{Z'}{N}.$$

Elle est identique à celle trouvée dans le cas des engrenages cylindriques à la condition de substituer au nombre de dents du premier organe, le nombre de ses filets.

Surface des dents de la roue. — Nous avons supposé jusqu'alors que la roue était un disque dénué d'épaisseur ; comme en pratique il n'en est rien, il est nécessaire de donner à ses dents une certaine surface dont nous allons rechercher la nature.

Imposons, à cet effet, à la surface d'une dent en prise avec un filet de vis, la condition de tangence ; le lieu de leurs points de contact coïncide alors avec la droite IE qui engendre les cercles développés et, à un moment donné, la surface du filet de vis correspondant à AB et celle de la

Digitized by Google

dent qui lui est conjuguée sont en contact au point M_1, par exemple, et admettent par conséquent même plan tangent en ce point. Or, ce dernier est déterminé par la position A_1B_1 qu'occupe alors AB et par la tangente M_1T_1, au point M_1, à la courbe section du filet par le plan perpendiculaire à celui de la figure et qui contient la droite IE. Si donc nous assujettissons la surface de la dent CD à contenir cette dernière droite et si

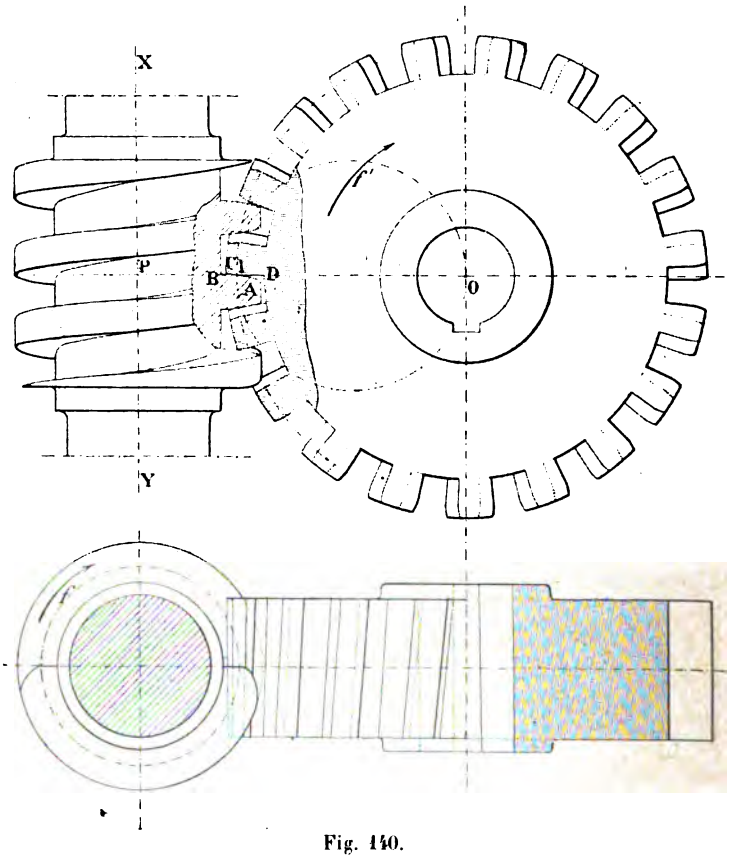


Fig. 140.

nous répétons cette construction un certain nombre de fois en faisant varier la position du point M, nous aurons satisfait à la condition de contact des surfaces de la vis et de la roue dès qu'elles entrent en prise. Cette dernière, qui n'est pas au nombre de celles étudiées en géométrie descriptive, est réglée, admet pour directrice la développante CD et toutes ses génératrices sont tangentes au cylindre de révolution de rayon OE dont l'axe coïncide avec celui de la roue.

Digitized by Google

La vis représentée sur la figure 140 correspond à un tracé épicycloïdal ; sa théorie est identique à la précédente.

b) *Vis à filets carrés.*

Si le profil des dents de la crémaillère est perpendiculaire à l'axe ZZ' de cette dernière (fig. 142), la vis engendrée, comme nous l'avons fait précédemment, est à filets carrés.

Fig. 141.

Surface des dents de la roue. — Conservons les mêmes hypothèses et les mêmes notations que dans le cas précédent. La droite M_1T_1 devient alors une tangente à une hélice qui a même pas, même axe que la vis et qui est tracée sur un de ses filets. Comme de plus sa projection sur le plan de la figure coïncide avec la droite ZZ', il en résulte qu'elle fait avec ce dernier un angle constant tout en jouissant des propriétés précédentes. La surface de la dent de la roue est par suite une surface *hélicoïde développable*.

Réciprocité de l'engrenage. — La recherche de la réciprocité de l'engrenage faisant appel à des connaissances de mécanique que les

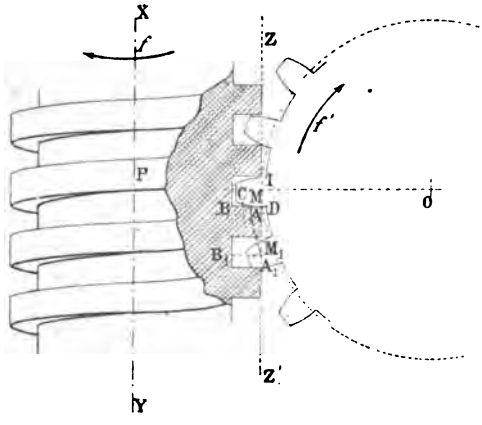


Fig. 142.

élèves ne possèdent pas encore, nous nous contenterons d'énoncer les résultats suivants qui seront établis dans le cours de première division :

L'engrenage n'est pas réciproque quand l'inclinaison des filets de la vis est inférieure à 45°. L'on utilise cette propriété dans l'élévation des

Digitized by Google

fardeaux qui se maintiennent à la hauteur qu'ils ont atteinte dans le cas où la rotation de la vis vient à cesser.

Dans tous les autres cas l'engrenage est réciproque.

Vis tangente.

102. Une seconde espèce de roue engrénant avec la vis est employée

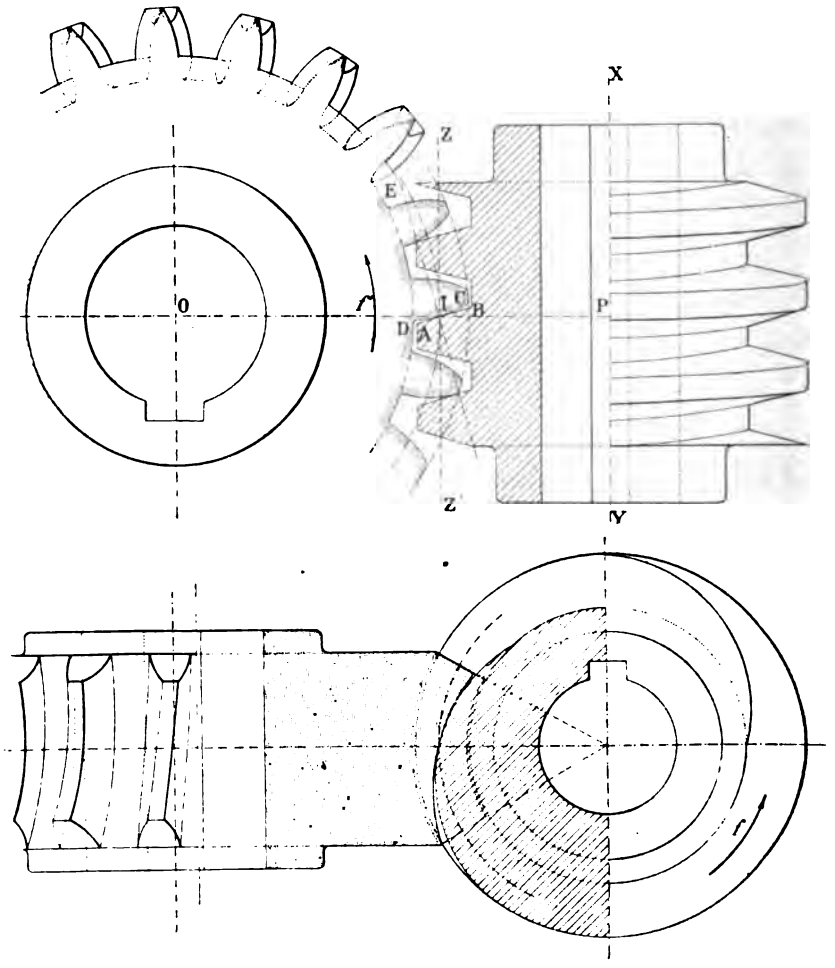


Fig. 143.

dans le cas où la résistance à vaincre est considérable. Le contact de l'une de ses dents et du filet de vis correspondant se fait alors en plu-

Digitized by Google

sieurs points à la fois et non en un seul comme dans le cas précédent ; de plus ses dents sont limitées à un cylindre concentrique au noyau de la vis.

La surface de la vis est engendrée comme précédemment ; quant à celle des dents de la roue, elle en est réciproque pour que la conduite se fasse avec un rapport constant de vitesses angulaires.

Fig. 144.

Si donc nous faisons une section dans les deux organes par un plan perpendiculaire à l'axe de la roue, nous obtenons dans un filet de vis une courbe conjuguée de la section faite dans la dent correspondante de la roue et cette dernière, qui est inconnue, peut se déterminer en appliquant le tracé de Poncelet. En répétant plusieurs fois cette construction nous obtenons un certain nombre de courbes analogues à la précédente ; leur ensemble détermine la surface de la dent considérée.

Malheureusement cette construction est un peu longue et en dessin l'on se contente d'une approximation. On considère la dent de la roue comme engendrée par le profil CD, situé dans le plan de la figure, auquel on imprime un mouvement hélicoïdal de manière que le milieu de son épaisseur décrive une hélice de même pas que la vis ; pour éviter qu'elle soit trop aiguë on la limite ensuite à deux cônes de tête dont les directrices sont des circonférences qui, sur le plan de la figure, ont pour rayon la plus courte distance des axes.

Fig 145.

Vis a filets convergents.

103. La vis à filets convergents représentée par l'épure 146 est une troisième espèce de vis qui embrasse la roue. Son noyau n'est pas un cylindre de-

Digitized by Google

révolution, mais la surface engendrée par la circonférence primitive de la roue tournant autour de l'axe de la vis. Dans le plan moyen de la roue les profils des dents sont identiques à ceux que l'on obtient lorsqu'on effectue le tracé d'un engrenage intérieur pour lequel les cercles primitifs sont en coïncidence.

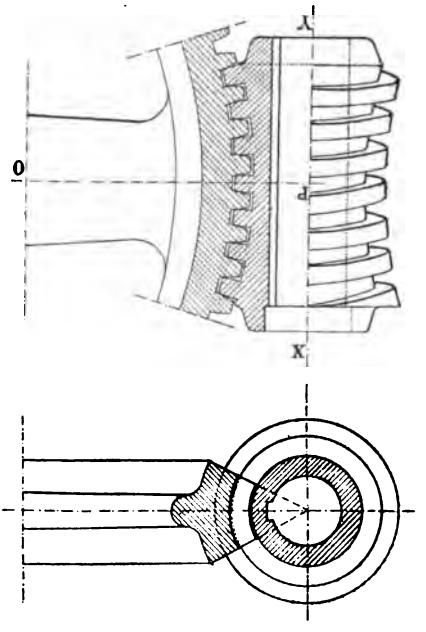


Fig. 146.

Les avantages d'une telle vis sont les suivants :

1° Répartition de l'effort sur un plus grand nombre de dents ;

2° Réduction de l'usure ;

3° Résistance plus grande des dents ;

4° Suppression du jeu et des chocs.

Toutefois la réparation de la vis, lorsqu'elle s'impose, est longue et coûteuse.

Digitized by Google

CHAPITRE X

—

TRAINS D'ENGRENAGES OU ÉQUIPAGES DE ROUES DENTÉES

104. Définition d'un train. — Quand on veut transmettre par engrenage un mouvement de rotation d'un arbre à un autre, on ne peut employer que des roues dont les nombres de dents sont compris entre 8 et 180 et il est impossible d'opérer directement lorsque la distance des arbres devient, ou trop faible, ou trop considérable. On a recours alors à un certain nombre de roues auxiliaires dont l'ensemble

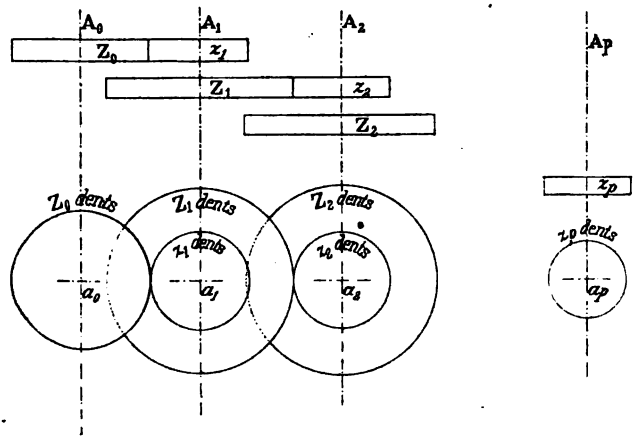


Fig. 147.

constitue un train de roues dentées. Elles sont calées deux par deux, comme l'indique la figure, sur des arbres intermédiaires A_1, A_2, ..., A_{p-1} ; les arbres moteurs et à conduire A_0 et A_p font toutefois exception à la règle et sont l'un et l'autre solidaires d'une seule roue.

Digitized by Google

Dans tout ce qui va suivre, nous regarderons les vitesses angulaires $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\ldots, \omega_p$ des arbres $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots, A_p$ comme des nombres algébriques, positifs dans le cas où les rotations s'effectuent dans un sens, négatifs dans le cas contraire; nous distinguerons aussi les roues

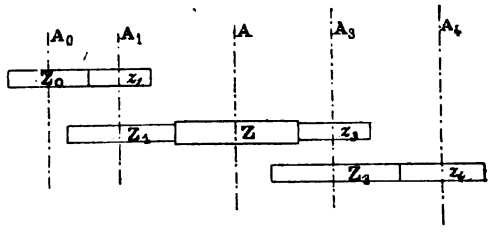


Fig. 148.

du train en roues menantes et menées et en général nous désignerons par Z_i et par z_i les nombres de dents des roues menante et menée calées sur l'arbre A_i.

105. Raison d'un train. — On appelle raison ε d'un train, le rapport $\frac{\omega_p}{\omega_0}$ qui existe entre les vitesses angulaires de l'arbre à conduire et de l'arbre moteur; elle est positive dans le cas où ils tournent dans le même sens, négative dans le cas contraire.

106. Calcul de la raison d'un train en fonction des nombres de dents des roues qui le constituent. — a) *Le train n'a que deux arbres.* — Le train formé de deux roues cylindriques extérieures ayant été étudié § 7, nous pouvons écrire :

$$\varepsilon = \frac{\omega_p}{\omega_0} = -\frac{Z_0}{z_p}. \qquad (1)$$

Dans le cas contraire où les roues sont intérieures :

$$\varepsilon = \frac{Z_0}{z_p}.$$

b) *Le train a $p+1$ arbres et les roues sont toutes extérieures.* — Sa raison peut s'écrire :

$$\varepsilon = \frac{\omega_p}{\omega_0} = \frac{\omega_1}{\omega_0} \times \frac{\omega_2}{\omega_1} \times \frac{\omega_3}{\omega_2} \ldots\ldots \times \frac{\omega_{p-1}}{\omega_{p-2}} \times \frac{\omega_p}{\omega_{p-1}}.$$

Chacun des rapports qui figurent dans le deuxième membre de cette

Digitized by Google

égalité représentant la raison d'un train de deux roues, d'après ce qui précède nous pouvons poser :

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{Z_0}{z_1},$$
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{Z_1}{z_2},$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\frac{\omega_{p-1}}{\omega_{p-2}} = -\frac{Z_{p-2}}{z_{p-1}},$$
$$\frac{\omega_p}{\omega_{p-1}} = -\frac{Z_{p-1}}{z_p}.$$

Si donc, nous faisons le produit membre à membre de ces p égalités, nous obtenons pour la raison du train l'expression suivante :

$$\varepsilon = (-1)^p \frac{Z_0 Z_1 Z_2 \ldots Z_{p-1}}{z_1 z_2 z_3 \ldots z_p}.$$

Elle exprime que la valeur absolue de la raison d'un équipage de roues dentées est égale au quotient du produit des nombres de dents des roues menantes par le produit des nombres de dents des roues menées. Cette raison elle-même est positive quand le nombre d'arbres de rotation est impair et négative dans le cas contraire.

Dans l'établissement de cette formule, nous avons supposé que tous les arbres de rotation étaient parallèles ; elle est encore vraie si quelques-uns d'entre eux sont concourants, puisque la relation (1) existe aussi bien dans le cas des roues d'angles que dans le cas des roues cylindriques.

c) *Les roues du train sont les unes extérieures, les autres intérieures.* — La valeur absolue de la raison reste la même ; son signe seul change et correspond à celui de $(-1)^k$, k désignant le nombre de couples de roues extérieures.

107. Remarques. — *a)* Dans le train précédent, introduisons un arbre intermédiaire A sur lequel nous calons une seule roue R engrenant, comme l'indique la figure 148, avec la roue menante précédente et la roue menée suivante. Cette condition nous obligeant à la considérer à la fois comme roue menante et comme roue menée, son nombre de dents figure au numérateur et au dénominateur de l'expression de la raison et ne modifie en rien sa valeur absolue ; son signe seul se trouve changé.

Digitized by Google

b) Le numérateur et le dénominateur de la fraction exprimant la raison d'un train comportent le même nombre de facteurs ; il correspond au nombre d'arbres de rotation diminué d'une unité.

108. Recherche d'un train qui correspond à une raison donnée. — a) *Solution de Young.* — La raison donnée est nécessairement commensurable d'après ce qui précède. Nous admettrons, avec Young, que le nombre total des dents des roues du train que l'on cherche est minimum, que les roues menantes d'une part, les roues menées d'autre part ont toutes le même nombre de dents. Z exprimant le premier, z le second et ε la raison, les inconnues du problème sont alors Z, z et le nombre $p+1$ d'arbres dont se compose le train.

Pour les obtenir, posons :

$$\frac{Z}{z} = x.$$

Nous pouvons alors écrire l'équation :

$$x^p = \varepsilon$$

de laquelle nous déduisons la suivante en prenant les logarithmes népériens des deux membres :

$$p = \frac{L\varepsilon}{Lx}. \qquad (1)$$

Comme il y a dans le train p roues menantes et p roues menées, le nombre total de leurs dents a pour expression $p(Z+z)$ ou bien encore, puisque $Z = zx$:

$$z \cdot L\varepsilon \cdot \frac{1+x}{Lx},$$

et la valeur que nous devons donner à x pour le rendre minimum doit vérifier l'équation :

$$z \cdot L\varepsilon \frac{Lx - \frac{1+x}{x}}{L^2x} = 0.$$

obtenue en égalant à zéro la dérivée par rapport à x de la fonction précédente.

Or, ε étant différent de l'unité puisque c'est une fraction, x n'étant ni nulle, ni infinie, nous sommes conduits finalement à satisfaire à l'équation :

$$Lx = \frac{1+x}{x}.$$

Digitized by Google

Résolue par approximation, elle donne :

$$x = 3\,.\,59.$$

Si à la place du nombre 3 . 59, nous prenons 3 . 60, le rapport $\frac{Z}{z}$ peut s'écrire :

$$\frac{Z}{z} = \frac{36}{10},$$

il fournit pour Z et z les valeurs suivantes :

$$Z = 36, \quad z = 10.$$

Pour obtenir le nombre d'arbres du train, il nous suffit de calculer p, c'est-à-dire de remplacer dans l'équation (1) $L\varepsilon$ et Lx par leurs valeurs ; mais nous pouvons aussi nous donner p et rechercher les valeurs correspondantes de ε. Nous obtenons alors les résultats suivants :

Pour $p = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad .....$
$\varepsilon = 3.60, \; 12.96, \; 46.66, \; 167.98, \; 604.73, \; .....$

et le problème est résolu.

b) *Solution de Huyghens.* — Le procédé suivi par Huyghens conduit à une solution plus générale du problème précédent ; il comporte deux cas :

α) *Le numérateur et le dénominateur de la fraction donnée n'étant pas premiers peuvent être décomposés en facteurs premiers inférieurs à* 180.

Après avoir effectué la décomposition et trouvé un même nombre de facteurs au numérateur et au dénominateur nous faisons correspondre à chacun de ceux du numérateur un nombre de dents de roue menante, et à chacun de ceux du dénominateur un nombre de dents de roue menée.

Dans le cas où les facteurs ne sont pas en même nombre au numérateur et au dénominateur par l'introduction de facteurs étrangers, sans toutefois changer la valeur de la raison, nous pourrons revenir au cas que nous venons d'examiner.

Cette manière de procéder montre qu'il y a une infinité de solutions à la question posée. En pratique, on choisit la moins coûteuse.

β) *La décomposition en facteurs premiers conduit à des facteurs supérieurs à* 180 *ou bien l'un des termes de la fraction ou les deux à la fois sont premiers.*

En appliquant la théorie des fractions continues, on recherche une valeur approchée de la raison qui jouisse des propriétés précédentes et l'on opère sur elle comme nous venons de l'exposer.

Digitized by Google

109. Applications. — a) *Réaliser un train qui a pour raison* $\frac{5400}{360}$.

5400 et 360 étant décomposables en facteurs premiers, en opérant cette décomposition, nous obtenons :

$$\frac{5400}{360} = \frac{2^3 \times 3^3 \times 5^2}{2^3 \times 3^2 \times 5} = \frac{(3 \times 5) \cdot (3^2 \cdot 2) \cdot (2^2 \cdot 5)}{(2 \times 3) \cdot (2 \times 3) \cdot (2 \cdot 5)}$$
$$= \frac{15 \cdot 18 \cdot 20}{6 \cdot 6 \cdot 10} = \frac{30 \cdot 36 \cdot 20}{12 \cdot 12 \cdot 10}.$$

Comme le train correspondant se compose de quatre arbres, il a une raison négative. Nous sommes alors conduits pour la rendre positive, à introduire, comme l'indique la figure, une roue auxiliaire A_3. Nous pouvons alors satisfaire au problème posé au moyen de quatre roues menantes

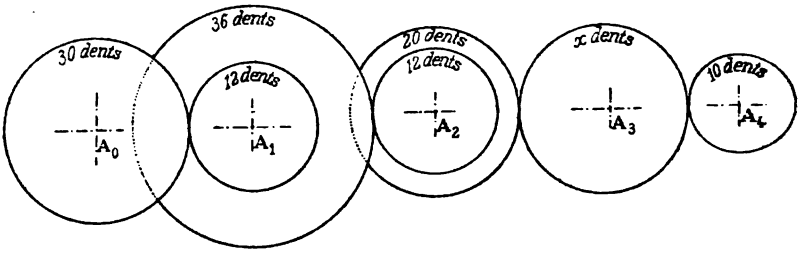


Fig. 119.

ayant respectivement 30, 36, 20 et x dents et de quatre roues menées de 12, 12, x et 10 dents.

b) *Réaliser un train qui a pour raison* $\frac{823}{407}$.

823 étant un nombre premier supérieur à 180, nous sommes conduits, d'après la théorie générale, à convertir la fraction donnée en fraction continue. Nous obtenons alors :

$$\frac{823}{407} = 2 + \cfrac{1}{45 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Cette fraction a trois réduites ; les deux premières sont :

$$2, \quad 2 + \frac{1}{45} = \frac{91}{45}.$$

Quant à la troisième, calculée d'après une règle connue, elle correspond à la fraction :

$$\frac{91 \times 4 + 2}{45 \times 4 + 1} = \frac{366}{181},$$

Digitized by Google

dont le dénominateur est premier et de plus supérieur à 180. Nous ne pouvons donc pas la substituer à la fraction donnée sans quoi nous rencontrerions la même difficulté qu'au début. Nous pouvons toutefois essayer la réduite intercalaire suivante :

$$\frac{366+91}{45+181}=\frac{457}{226},$$

mais son numérateur est encore premier.

La seconde réduite $\frac{91}{45}$ qui peut s'écrire :

$$\frac{91}{45}=\frac{13\times 7}{5\times 9}=\frac{13\times 14}{10\times 9},$$

nous fournit une solution du problème. Le train correspondant a trois arbres, deux roues menantes ayant respectivement 13 et 14 dents et deux roues menées de 10 et 9 dents ; il correspond à une raison qui diffère de celle qu'on se proposait d'obtenir d'une quantité inférieure à $\frac{1}{45^2}$.

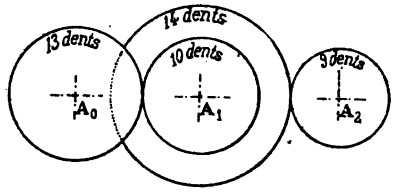


Fig. 150.

110. Rouage lunaire. — *Réaliser un train de façon que l'arbre à conduire suive la révolution synodique de la lune et que l'arbre moteur mette douze heures pour faire un tour.*

La révolution synodique de la lune s'effectuant en 29 j. 5306, la raison du train à réaliser a pour expression :

$$\frac{29,5306}{0,5}=\frac{147653}{2500}.$$

Cette fraction, décomposée en facteurs premiers, conduit au résultat suivant :

$$\frac{147653}{2500}=\frac{11\cdot 31\cdot 433}{2\cdot 2\cdot 54}.$$

Or, 433 étant premier et supérieur à 180, le problème posé est une application du cas (*b*) exposé § 109 et nous devons convertir la fraction donnée en fraction continue ; nous obtenons alors :

$$\frac{147653}{2500}=59+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{3}}}}}$$

Digitized by Google

Les réduites de cette fraction continue sont :

$$59, \quad \frac{945}{16} = \frac{3^3 \times 5 \times 7}{24}, \quad \frac{1949}{33} = \frac{1949}{3 \times 11},$$

$$\frac{2894}{49} = \frac{2 \times 31 \times 37}{72}, \quad \frac{48253}{817} = \frac{73 \times 661}{19 \times 43}.$$

La quatrième réduite conduit à un train qui fournit par période une avance de 1″05.

En employant, suivant Willis, les réduites intercalaires :

$$\frac{2894 + 1949}{49 + 33} = \frac{4843}{82} = \frac{29 \times 167}{2 \times 41},$$

$$\frac{2894 \times 6 + 1949}{49 \times 6 + 33} = \frac{19313}{327} = \frac{7 \times 31 \times 89}{3 \times 109},$$

$$\frac{48253 \times 2 + 2894}{817 \times 2 + 49} = \frac{99400}{1683} = \frac{2^3 \times 5^2 \times 7 \times 71}{3^2 \times 11 \times 17},$$

on obtient avec la première un retard de 8″60 et avec les deux autres des avances de 0″6 et 1″03.

111. Rouage solaire. — *Réaliser un train de façon que la durée de l'année tropique corresponde à la rotation de l'arbre à conduire et le jour à celle de l'arbre moteur.*

A l'année tropique, évaluée en jours, correspond le nombre décimal périodique mixte 365,242222..... ou bien encore la fraction ordinaire :

$$\frac{365242 - 36524}{900} = \frac{328718}{900} = \frac{164359}{450} = \frac{13 \cdot 47 \cdot 269}{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2},$$

elle fournit la raison du train à réaliser. Comme 269 est supérieur à 180, nous sommes conduits, pour résoudre le problème posé, à convertir la fraction trouvée en fraction continue. Nous obtenons alors la décomposition :

$$\frac{164359}{450} = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

Digitized by Google

à laquelle correspondent les réduites :

$$365,\quad \frac{1461}{4}=\frac{3\times 487}{2^2},\quad \frac{10592}{29}=\frac{2^5\times 331}{29},\quad \frac{12053}{33}=\frac{17\times 709}{3\times 11}.$$

$$\frac{46751}{128}=\frac{46751}{2^7},\qquad \frac{58804}{161}=\frac{2^2\times 61\times 241}{7\times 23}.$$

La réduite intercalaire suivante employée par Willis :

$$\frac{58804+46751}{161+128}=\frac{105555}{289}=\frac{3\times 5\times 31\times 227}{17^2},$$

conduit à un train qui produit un retard de $0''.7$.

112. Tour à fileter. — Le tour à fileter, réduit à ses parties essentielles et représenté par la figure 151, se compose d'un banc rigide B et de deux poupées P et P′ ; la première est fixe tandis que la seconde peut se déplacer parallèlement à l'axe du tour de façon à venir occuper des positions correspondantes à la longueur de la pièce A à fileter. Cette dernière qui tourne avec une vitesse angulaire ω reçoit son mouvement de l'arbre moteur par l'intermédiaire de poulies étagées et le transmet à l'axe X′Y′ d'une vis-mère V par l'intermédiaire d'un train de roues dentées dont les arbres intermédiaires sont disposés dans une rainure pratiquée dans une pièce L appelée *lyre*. Elle est mobile autour de l'axe de la vis-mère sur lequel elle peut prendre des inclinaisons différentes suivant le nombre des roues du train et devient solidaire du bâti au moyen de vis et écrous.

La vis-mère s'engage dans un écrou qui ne peut se déplacer que parallèlement à son axe et qui est solidaire d'un chariot porte-outil C dont le mouvement est réglé de façon à obtenir un filetage de pas p connu.

D'après la théorie des vis et écrous, la vitesse du chariot dépendant de celle de la vis-mère à laquelle correspond un pas p', nous sommes conduits à rechercher avec quelle vitesse ω' elle doit tourner pour obtenir le filetage demandé.

Désignons à cet effet par V la vitesse du chariot. La formule, établie § 90, nous permet d'écrire :

$$V=\frac{p'\omega'}{2\pi}.$$

Comme d'autre part, l'outil avance d'une longueur p pour une rotation de la pièce à fileter :

$$V=\frac{p\omega}{2\pi}.$$

Digitized by Google

Par suite :

$$p\omega = p'\omega',$$

ou :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{p}{p'},$$

relation qui exprime que *la raison du train à établir entre l'axe de la*

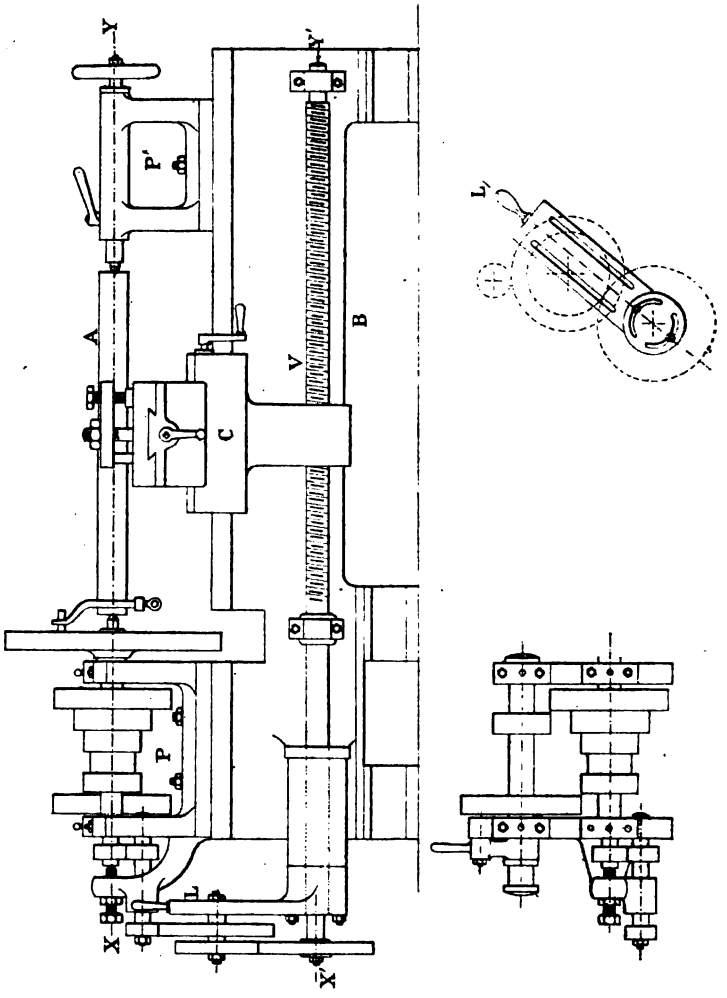


Fig. 181.

pièce à travailler et celui de la vis-mère est inversement proportionnelle aux pas.

113. Applications. — a) *Avec un tour, fileter une vis d'un pas égal à 24 millimètres sachant que celui de la vis-mère est de* **10** *milli-*

Digitized by Google

mètres et que les nombres de dents des roues de la série accompagnant le tour sont des multiples de 5.

Le rapport $\frac{p}{p'}$ pouvant s'écrire :

$$\frac{p}{p'} = \frac{6 \times 4}{2 \times 5} = \frac{30 \times 20}{10 \times 25},$$

nous résolvons le problème posé au moyen d'un train de trois arbres

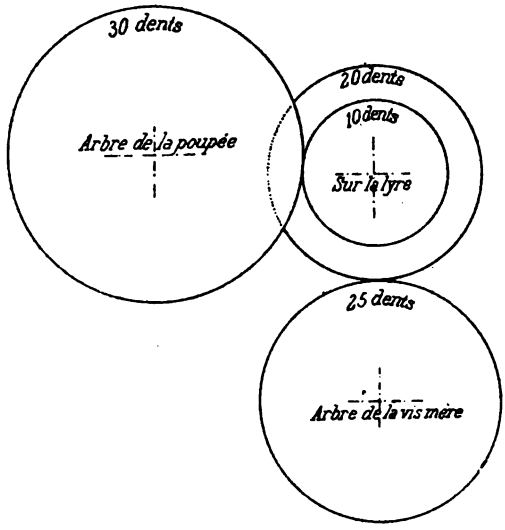


Fig. 152.

comportant deux roues menantes de 30 et 20 dents et deux roues menées de 10 et 25 dents.

b) *Même problème en supposant :* $p = 7^{m \cdot m}1$, $p' = 10^{m \cdot m}$. — La fraction $\frac{71}{100}$ qui exprime la raison du train ayant son numérateur premier, nous devons la décomposer en fraction continue ; nous obtenons alors la décomposition suivante :

$$\frac{71}{100} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}}}}.$$

Les réduites de cette fraction continue sont :

$$1, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{22}{31}.$$

Digitized by Google

Les nombres 31 et 7 étant premiers, la réduite intermédiaire suivante :

$$\frac{22+10}{31+14}=\frac{32}{45}=\frac{4\times4\times2}{5\times3\times3}=\frac{10\times20\times60}{25\times15\times45},$$

nous permet de conclure qu'un train composé de quatre arbres et comportant trois roues menantes de 10, 20 et 60 dents et trois roues

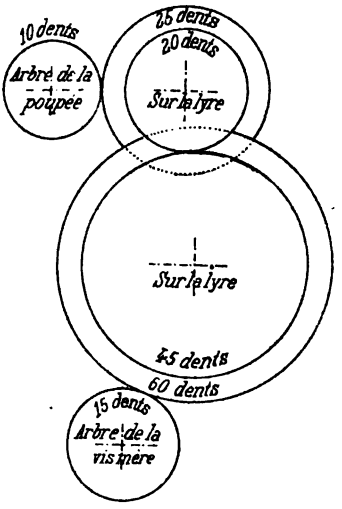


Fig. 153.

menées de 25, 45 et 15 dents, réalise un filetage différant de celui demandé de la fraction $\frac{1^{m\cdot m}}{90}$.

En effet, en désignant par p_1 le pas obtenu, nous pouvons écrire :

$$\frac{p_1}{p'}=\frac{32}{45},$$

$$\frac{p}{p'}=\frac{71}{100}.$$

Par suite :

$$\frac{p_1-p}{p'}=\frac{32}{45}-\frac{71}{100}=\frac{1}{2^2\cdot3^2\cdot5^2}.$$

La différence p_1-p a donc pour expression :

$$p_1-p=\frac{10^{m\cdot m}}{2^2\cdot3^2\cdot5^2}=\frac{1^{m\cdot m}}{90}.$$

Digitized by Google

CHAPITRE XI

—

TRAINS ÉPICYCLOÏDAUX

114. Définition. — On appelle *train épicycloïdal* un ensemble de roues dentées dont l'une au moins est animée à la fois de deux mouvements de rotation qui s'effectuent respectivement autour de son arbre et autour d'un autre arbre par l'intermédiaire d'un bras de levier.

Il en existe de deux sortes, à savoir : 1° *Les trains épicycloïdaux plans* dont les axes sont tous parallèles et pour lesquels tout point invariablement lié à une roue R_1 qui roule sans glisser sur une roue R_2 décrit une épicycloïde plane ; 2° *les trains épicycloïdaux sphériques* qui renferment des roues d'angles et pour lesquels tout point invariablement lié à une roue conique qui roule sans glisser sur une autre roue décrit une épicycloïde sphérique.

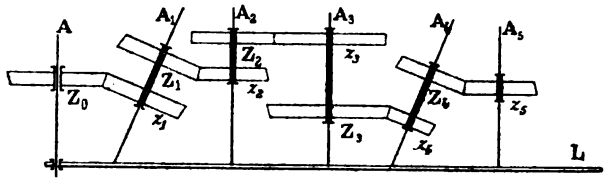


Fig. 134.

115. Problème. — *Dans un train épicycloïdal, trouver la vitesse angulaire d'une roue par rapport au bras de levier, connaissant les vitesses angulaires ω' et ω de ces deux organes.*

Pour traiter le problème dans toute sa généralité, supposons $\omega' > \omega$ et examinons les quatre cas suivants :

a) *Le bras de levier et la roue tournent dans le même sens.*

α) Soit f le sens commun aux deux rotations connues. Le principe

Digitized by Google

fondamental, établi en cinématique théorique § 184, montre que le mouvement relatif de la roue par rapport au bras de levier résulte de deux rotations parallèles : l'une de sens f, de vitesse angulaire ω' autour de l'arbre O' ; l'autre de sens opposé de vitesse angulaire ω autour de l'arbre O. Il équivaut par suite à une rotation unique de sens f et de vitesse angulaire $\omega' - \omega$.

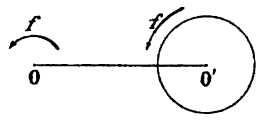


Fig. 155.

β) Dans le cas où la flèche f' indique le sens commun aux deux rotations connues, le résultat précédent nous permet de conclure que le mouvement cherché revient à une rotation unique de sens f' et de vitesse angulaire $\omega' - \omega$.

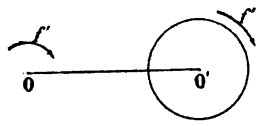


Fig. 156.

b) *La roue et le bras du levier tournent en sens contraires.*

γ) En supposant que les flèches f et f' indiquent les sens de rotation de ces deux organes, et en appliquant toujours le même principe, nous obtenons $\omega' + \omega$ pour expression de la vitesse angulaire relative cherchée et pour sens celui de la flèche f.

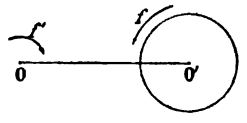


Fig. 157.

δ) Comme du troisième cas de figure nous pouvons passer au quatrième en échangeant le sens des flèches f et f', il en résulte que, dans ce cas, la vitesse angulaire de la roue par rapport au bras de levier a pour expression $\omega' + \omega$ et correspond au sens de rotation indiqué par la flèche f'.

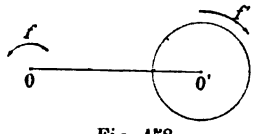


Fig. 158.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir, tous différents, peuvent cependant se ramener à une formule unique en convenant de faire précéder du signe + ou du signe — la vitesse angulaire de toute rotation qui s'effectue, soit dans le sens de la flèche f, soit dans le sens de la flèche f'.

Examinons, en effet, le premier et le troisième cas :

Dans le premier cas, avec nos conventions, les vitesses angulaires de la roue, du bras de levier, de la roue par rapport au bras de levier, ont pour expressions :

$$+\omega', \qquad +\omega, \qquad +(\omega' - \omega).$$

Cette dernière pouvant s'écrire :

$$(+\omega') - (+\omega),$$

Digitized by Google

nous devons conclure *qu'on obtient la vitesse angulaire de la roue par rapport au bras de levier en faisant la différence entre les valeurs algébriques des vitesses angulaires de ces deux organes.*

Dans le troisième cas, les vitesses angulaires des mêmes organes ayant pour expressions :

$$+\omega', \qquad -\omega, \qquad +(\omega' + \omega)$$

et cette dernière pouvant s'écrire :

$$(+\omega') - (-\omega)$$

nous sommes conduits à la même règle pour l'obtenir. Elle est d'ailleurs tout à fait générale, comme nous pourrions nous en convaincre en examinant les deux cas laissés de côté.

116. Formule de Willis. — La formule de Willis donne la raison d'un train épicycloïdal en fonction des nombres de dents des roues du train.

Pour l'établir, remarquons que si nous communiquons au bras de levier ainsi qu'aux roues une vitesse égale et contraire à celle que possède le premier organe, nous retombons sur un train de roues dentées. Si donc nous désignons par ω_p, ω_o, ω les vitesses angulaires de l'arbre à conduire, de l'arbre moteur et du bras de levier nous pouvons écrire :

$$\varepsilon = \frac{\omega_p - \omega}{\omega_o - \omega} = (-1)^p \frac{Z_0 Z_1 Z_2 \ldots\ldots Z_{p-1}}{z_1 z_2 \ldots\ldots z_p}$$

en conservant les notations employées § 109.

Applications des trains épicycloïdaux.

Les trains épicycloïdaux servent : 1° à tracer des épicycloïdes ; 2° à transmettre un mouvement de rotation d'un arbre à un autre dans le cas où le rapport des vitesses angulaires conduit à des facteurs premiers trop grands ; 3° à réaliser quelques mouvements différentiels.

117. Tracé des épicycloïdes et hypocycloïdes. — Une roue R_2 engrenant comme l'indiquent les figures avec une roue fixe R_1, peut tourner à la fois autour de son arbre et autour de l'arbre O_1 par l'intermédiaire d'un bras de levier L. Un quelconque de ses points décrit donc une épicycloïde dans le cas où les deux roues sont extérieures (fig. 159) et une hypocycloïde dans le cas où elles sont intérieures (fig. 160).

Digitized by Google

Le tracé s'obtient au moyen de la pointe d'un crayon qui peut glisser à volonté dans une rainure pratiquée dans une barre AB invariablement

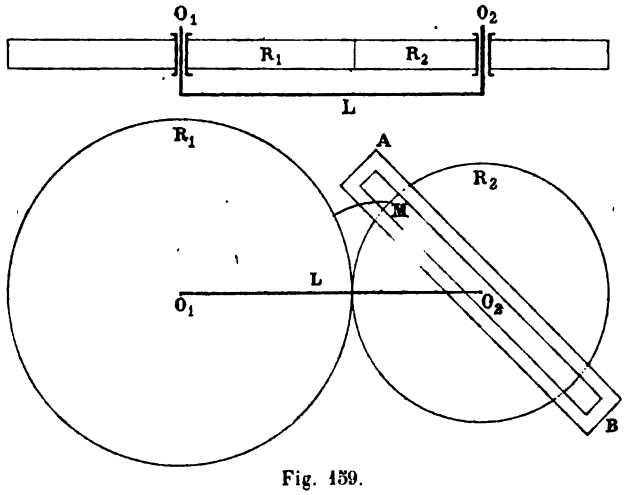


Fig. 159.

liée à la roue O_2 et y occuper au moment de la mise en mouvement du mécanisme une position fixe M. Suivant qu'elle est sur la circonférence

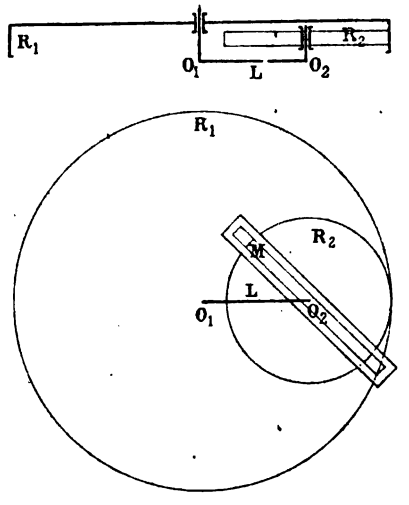


Fig. 160.

O_2 elle-même, à son extérieur ou à son intérieur, elle décrit des épicycloïdes ou hypocycloïdes ordinaires, allongées ou raccourcies.

Digitized by Google

118. Engrenage de Lahire. — Le train épicycloïdal de Lahire se compose, comme l'indique la figure 161, de deux roues : l'une R_1 est fixe ; l'autre R_2, de rayon moitié moindre, est folle autour de son arbre et mobile autour de l'arbre O_1 par l'intermédiaire d'un bras de levier L.

D'après un théorème établi en cinématique théorique, tout point de la petite roue décrivant un diamètre de la seconde, ce mécanisme permet de transformer un mouvement de rotation continue en un mouvement rectiligne alternatif.

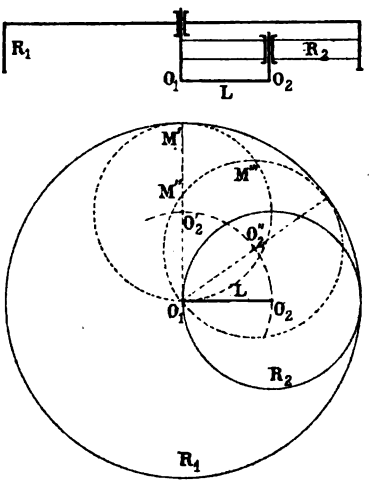


Fig. 161.

Si nous conservons les notations générales employées § 109, nous pouvons écrire en appliquant la formule de Willis :

$$\frac{\omega_2 - \omega}{-\omega} = \frac{2Z}{Z} = 2,$$

ou :

$$\omega_2 = -\omega,$$

relation qui exprime que les vitesses angulaires de la roue O_2 et du bras de levier sont égales et de signes contraires.

Nous pourrions d'ailleurs établir ce résultat à priori. Pour passer de la position M′ du point décrivant à une seconde position M″, nous pouvons, en effet, communiquer tout d'abord à la roue O'_2 un mouvement de translation rectiligne défini par le vecteur $(O'_2O''_2)$ et qui amène le point M′ en M‴ ; puis ensuite la faire tourner autour de l'arbre O''_2, de l'angle $\widehat{M'''O''_2M'}$, de manière à amener le point M‴ en coïncidence avec le point M″. Comme d'ailleurs sur la figure, les angles $\widehat{O'_2O_1O''_2}$, $\widehat{M'''O''_2M'}$ sont égaux et de sens contraires, il en est de même des deux vitesses angulaires ω_2 et ω.

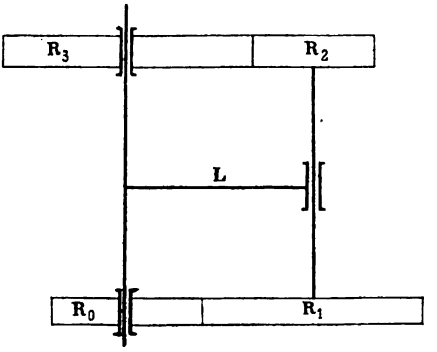


Fig. 162.

119. Problème. — *Établir la relation qui existe entre les vitesses angulaires* ω_3 *et* ω_0 *des roues* R_3 *et* R_0 *du train épicycloïdal représenté par la figure ci-contre.*

Digitized by Google

Les deux roues R_3 et R_0 tournant dans un même sens lorsque le bras de levier se trouve immobilisé par la pensée, la raison du train est positive et a pour valeur $\frac{Z_0 Z_2}{Z_3 Z_1}$.

La relation cherchée peut donc s'écrire :

$$\frac{\omega_3 - \omega}{\omega_0 - \omega} = \frac{Z_0 Z_2}{Z_3 Z_1}.$$

En particulier si l'on fait :

$$Z_0 = 10, \qquad Z_1 = 15, \qquad Z_2 = 12, \qquad Z_3 = 25$$

et $\omega_0 = 0$; il vient :

$$\omega_3 = \omega \times \frac{17}{25}.$$

120. Train épicycloïdal de Pecqueur. — Le train épicycloïdal de Pecqueur diffère simplement du précédent par le bras de levier qui est constitué par une roue N et qui reçoit son mouvement d'une roue M calée sur l'arbre moteur A_0.

En désignant par m, n, p, q, r et s les nombres de dents des roues M, N, P, Q, R et S, la formule de Willis nous permet d'écrire la relation suivante :

$$\frac{\omega_2 - \omega}{\omega_1 - \omega} = \frac{ps}{qr}.$$

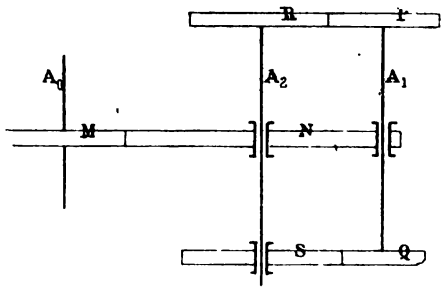


Fig. 163.

Dans le cas particulier où la roue S est maintenue fixe, elle devient :

$$\frac{\omega_2 - \omega}{-\omega} = \frac{ps}{qr}.$$

Résolue par rapport à ω_2 elle peut s'écrire :

$$\omega_2 = \omega\left(1 - \frac{ps}{qr}\right).$$

Et comme entre ω et ω_0 existe la relation :

$$\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{m}{n},$$

elle devient finalement :

$$\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{m}{n}\left(1 - \frac{ps}{qr}\right).$$

Digitized by Google

Discussion. — Si $\frac{ps}{qr} < 1$, la raison du train est négative et les deux arbres A_0 et A_2 tournent en sens contraires; si $\frac{ps}{qr} > 1$, ils tournent dans le même sens, et enfin si $\frac{ps}{qr}$ est très voisin de l'unité, le rapport $\frac{\omega_2}{\omega}$ est très faible et l'on peut alors communiquer à l'arbre A_2 un mouvement extrêmement lent, raison pour laquelle le train qui nous occupe fait partie des mécanismes à mouvements différentiels.

121. Application. — *Réaliser un train ayant pour raison* $-\frac{44609}{188190}$.

Le numérateur et le dénominateur de cette fraction n'étant pas des nombres premiers, nous les décomposons en facteurs premiers; nous obtenons alors:

$$44609 = 31 \times 1439$$
$$188190 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 17 \times 41.$$

Le facteur premier 1439 étant beaucoup trop grand pour que nous puissions résoudre le problème posé avec un train de roues dentées, nous allons en rechercher une solution au moyen du train épicycloïdal précédent. Nous l'obtiendrons en remarquant que la raison donnée peut s'écrire:

$$-\frac{44609}{188190} = -\frac{31 \times 1439}{54 \times 3485} = \frac{31}{54}\left(\frac{2046}{3485} - 1\right) = \frac{31}{54}\left(\frac{33 \times 62}{41 \times 85} - 1\right)$$

et en choisissant pour les roues du train les nombres de dents suivants:

$$m = 31, \quad n = 54, \quad p = 33, \quad q = 41, \quad r = 85, \quad s = 62.$$

122. Paradoxe de Fergusson. — *Une roue* M *ayant m dents*

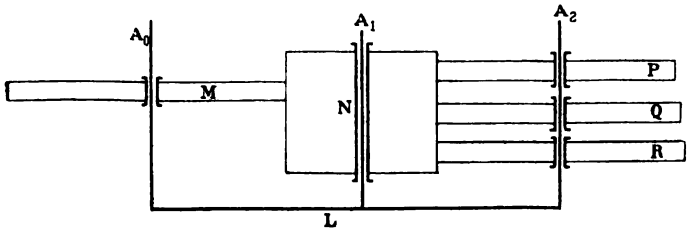


Fig. 164.

est folle et fixe sur un arbre A_0 *qui entraîne un bras de levier* L *sur lequel se trouvent calés deux arbres* A_1 *et* A_2; *autour de l'arbre* A_1,

Digitized by Google

peut tourner une roue folle qui engrène d'une part avec la roue **M** *et d'autre part avec trois autres roues* P, Q, R, *folles sur l'arbre* A_2. *Sachant que ces dernières roues ont respectivement* $m-1$, m, $m+1$, *on demande d'étudier leurs mouvements par rapport au bras de levier.*

Désignons par x, y, z, les vitesses augulaires des trois roues P, Q, R, et appliquons successivement la formule de Willis aux trois trains M . N . P, M . N . Q, et M . N . R ; nous obtenons les relations :

$$\frac{x-\omega}{-\omega} = \frac{m}{m-1}$$

$$\frac{y-\omega}{-\omega} = \frac{m}{m}$$

$$\frac{z-\omega}{-\omega} = \frac{m}{m+1}$$

desquelles nous déduisons les suivantes :

$$x = \frac{-\omega}{m-1}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{\omega}{m+1}.$$

Elles expriment que les roues P et Q tournent la première en sens inverse du bras de levier, la seconde dans le même sens et que la roue Q est immobile par rapport à ce même organe.

123. Remarque. — On pourrait objecter que les roues P, Q, R, qui tournent autour d'un même arbre et qui engrènent avec une même roue N ne peuvent avoir des nombres de dents différents. On conçoit cependant la possibilité de réaliser le train que nous venons de décrire en donnant aux dents des profils à développantes de cercle.

124. Train épicycloïdal à deux bras de levier. — Le train épicycloïdal à deux bras de levier se compose, comme l'indique la figure 165, de deux leviers L_1, L_2 fous tous deux sur les arbres A_0 et A_3, mais invariablement liés l'un à l'autre de façon à tourner avec la même vitesse angulaire ; d'une roue R_0 calée sur l'arbre A_0 et qui engrène avec un pignon fou R_1 lequel à son tour engrène avec le pignon fou R_2 qui transmet son mouvement à la roue R_3 calée sur l'arbre A_3.

En conservant les notations précédemment employées et supposant que les roues R_0 et R_3 d'une part, R_1 et R_2 d'autre part, aient le même nombre de dents, la formule de Willis nous conduit à la relation :

$$\omega_3 + \omega_0 = 2\omega.$$

Elle exprime que *la somme des vitesses angulaires des roues* R_0 *et*

Digitized by Google

R_3 *est toujours égale au double de la vitesse angulaire commune des deux bras de levier.*

125. Train épicycloïdal sphérique. — La figure 166 indique

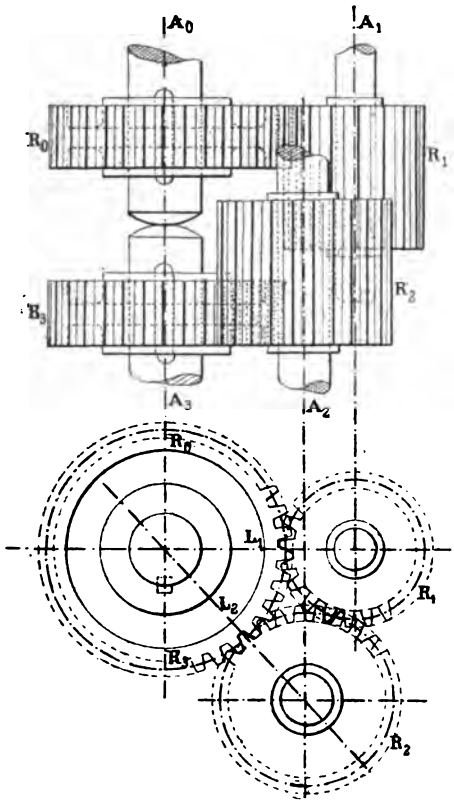


Fig. 165.

suffisamment la disposition du train sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans le détail de sa description. En lui appliquant la formule de Willis nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{\omega_3 - \omega}{\omega_0 - \omega} = -\frac{\rho_0\rho_2}{\rho_1\rho_3},$$

ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3, désignant les rayons des roues qui le composent.

Dans le cas particulier où les roues R_1 et R_2 sont confondues et où $\rho_0 = \rho_3$, le train prend la disposition indiquée par la figure 167 et la relation précédente devient :

$$\omega_3 + \omega_0 = 2\omega.$$

Digitized by Google

Elle est identique à celle trouvée dans le cas du train à deux bras de levier. Ce dernier mécanisme fréquemment employé aujourd'hui dans la

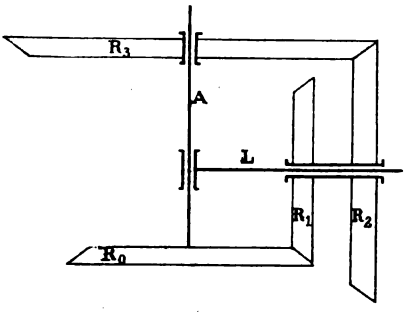


Fig. 166.

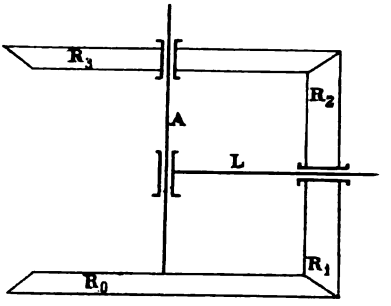


Fig. 167.

locomotion porte le nom de différentiel. Il comprend, comme l'indique la figure 168, un second pignon satellite symétrique du premier par rap-

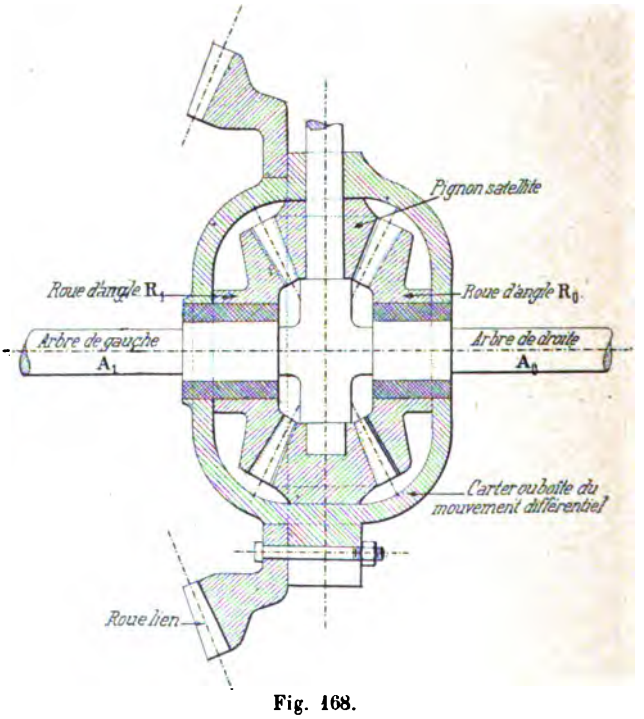


Fig. 168.

port à l'axe des deux roues et une roue lien qui joue le rôle de bras de levier et qui reçoit son action du moteur par l'intermédiaire d'une roue ou d'une courroie.

Digitized by Google

126. Différentiel à roues cylindriques de M. Villeminot. — M. Villeminot, ancien élève de l'école de Cluny, a inventé un différentiel à roues cylindriques qu'il décrit de façon suivante :

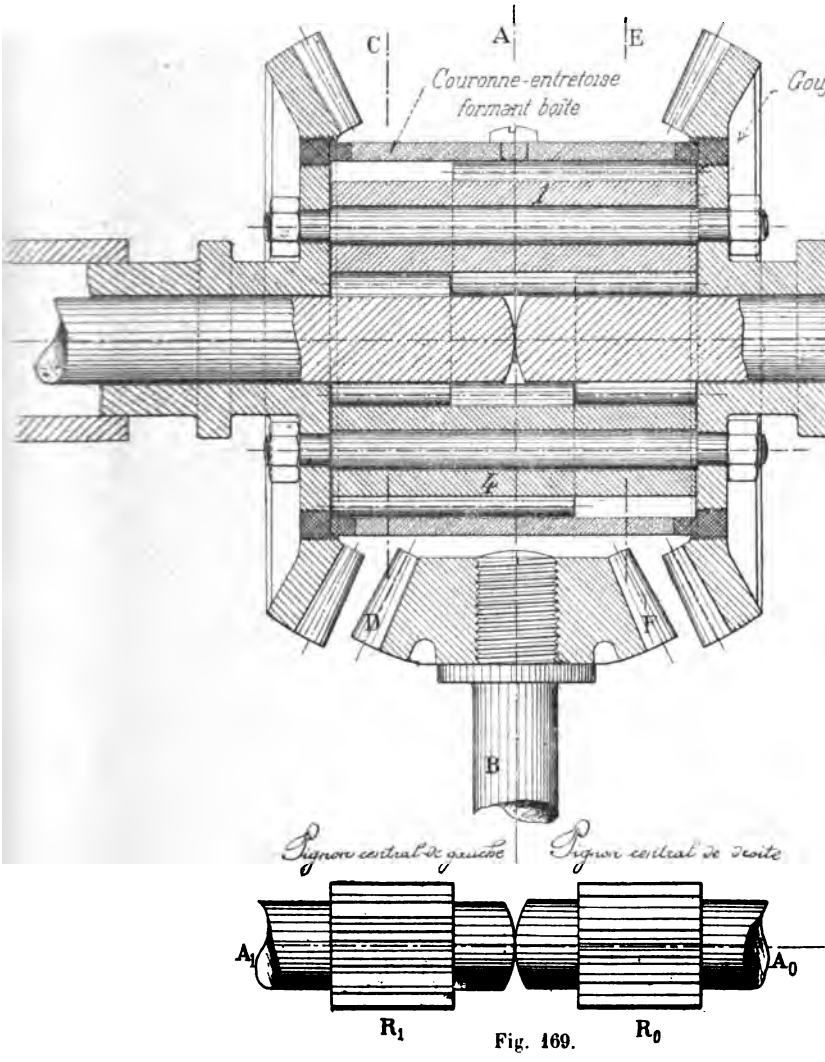


Fig. 169.

« Chacun sait que la propulsion d'une voiture automobile s'opère généralement au moyen d'un arbre intermédiaire qui reçoit son mouvement de rotation du moteur et le transmet aux roues par un moyen quelconque, chaîne sans fin, courroie ou tiges rigides avec joint à la Cardan. »

Digitized by Google

« Or, quand la voiture est soumise à un virage, les roues situées à l'intérieur de l'arc décrit parcourent un chemin plus petit que celles situées à l'extérieur et si elles étaient rendues solidaires de l'arbre moteur, il en résulterait une perturbation notable dans le mécanisme d'entraînement. Pour remédier à cet inconvénient et pour rendre indé-

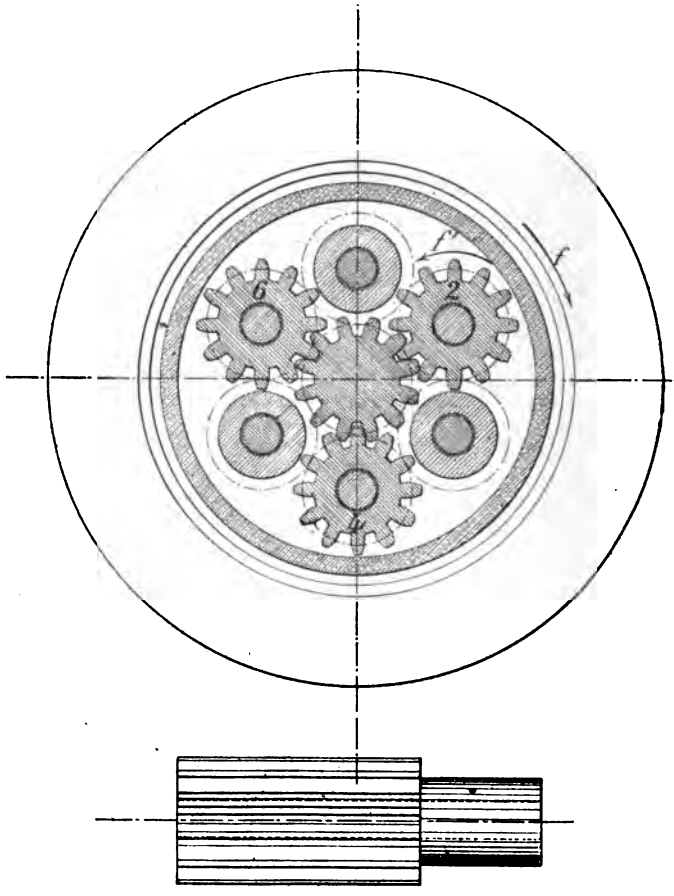


Fig. 170.

pendante chacune des roues motrices, on a imaginé de couper l'arbre moteur intermédiaire en deux tronçons et de les réunir au moyen d'un dispositif d'engrenage spécial, de telle façon qu'il y ait toujours connexité entre l'arbre moteur et chacune des roues motrices. Cet appareil indispensable constitue le mouvement différentiel. »

« Jusqu'ici les constructeurs d'automobiles avaient résolu le problème du différentiel au moyen d'une combinaison d'engrenages coniques

Digitized by Google

(fig. 168), évoluant dans une boîte fermée (Carter) et placée, soit sur l'arrière de la voiture, soit sur un arbre intermédiaire. Or, on sait que l'effort tangentiel exercé sur une dent d'un pignon d'angle ne s'exerce pas normalement ; c'est un effort oblique qui se décompose. Cette décomposition de force a pour effet d'éloigner les roues en prise et de

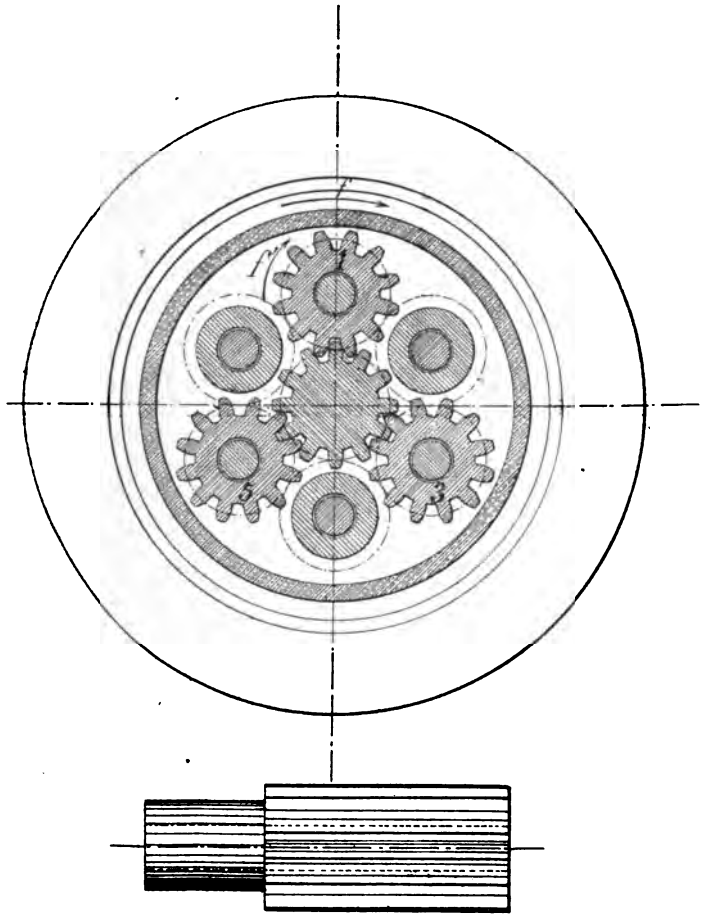


Fig. 171.

provoquer une poussée latérale dans le sens de leurs axes respectifs, poussée nécessitant une butée à l'extrémité de l'arbre porte-pignon et toujours préjudiciable à la bonne marche du mouvement. »

« Ces considérations ont provoqué chez certains constructeurs des études en vue d'obvier à ces inconvénients et actuellement quelques maisons françaises et américaines emploient les mouvements différentiels à pignons droits. »

Digitized by Google

« L'appareil qui a fait l'objet de mes recherches comprend deux arbres bout à bout, armés chacun d'un pignon venu de forge ou rapporté et de six pignons satellites du même diamètre pouvant engrener entre eux. Ces pignons satellites sont taillés sur les $\frac{2}{3}$ de leur longueur et

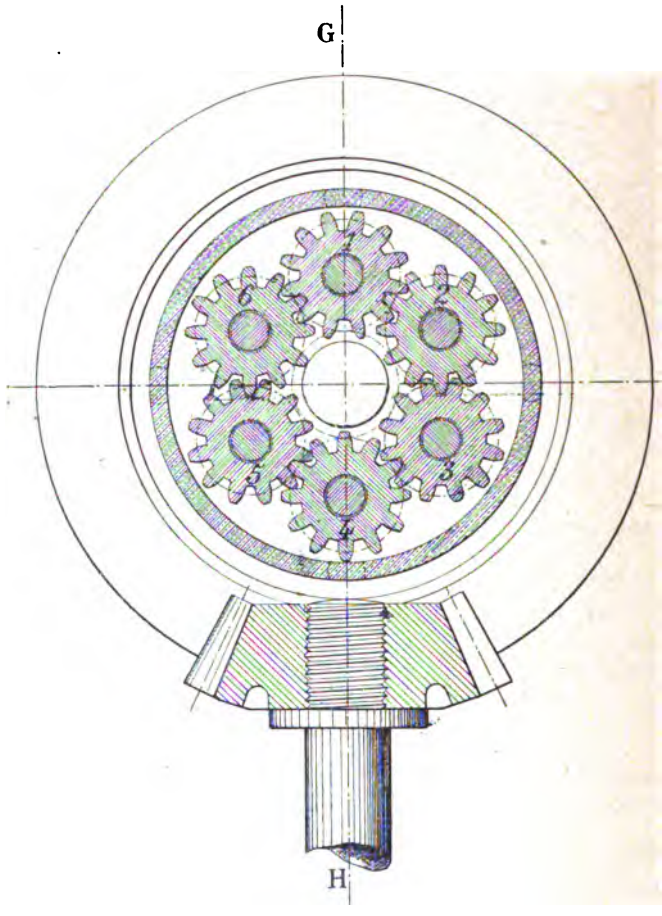


Fig. 172.

montés dans l'appareil, trois à gauche et trois à droite, au moyen de boulons formant entretoises entre les deux grandes roues d'angle du changement de marche. La longueur des dents des pignons centraux est la moitié de celle des dents des pignons satellites, de telle sorte que le tout étant monté comme l'indique la figure 169, les engrenages cylindriques s'enchevêtrent trois par trois, le pignon central de droite engre-

Digitized by Google

nant avec les pignons satellites 1, 3, 5 (fig. 171) et le pignon central de gauche engrenant avec les pignons satellites 2, 4, 6 (fig. 170). »

Tant que le mouvement se fait en ligne droite et que la résistance est la même sur les deux roues, les pignons satellites ne tournent pas sur eux-mêmes ; ils ne font que tourner, entraînés par les roues d'angle, autour de l'arbre d'arrière des roues motrices lesquelles tournent avec la même vitesse angulaire dans le sens de la flèche *f*, par exemple, comme si le mouvement était transmis par un engrenage intérieur. Mais dès que la résistance devient différente sur les deux roues, les pignons satellites se mettent en mouvement et la relation suivante existe entre les vitesses angulaires des deux roues :

$$\omega_1 + \omega_0 = 2\omega,$$

autrement dit, *leur somme reste constante*. Si donc la vitesse de l'une diminue, celle de l'autre augmente.

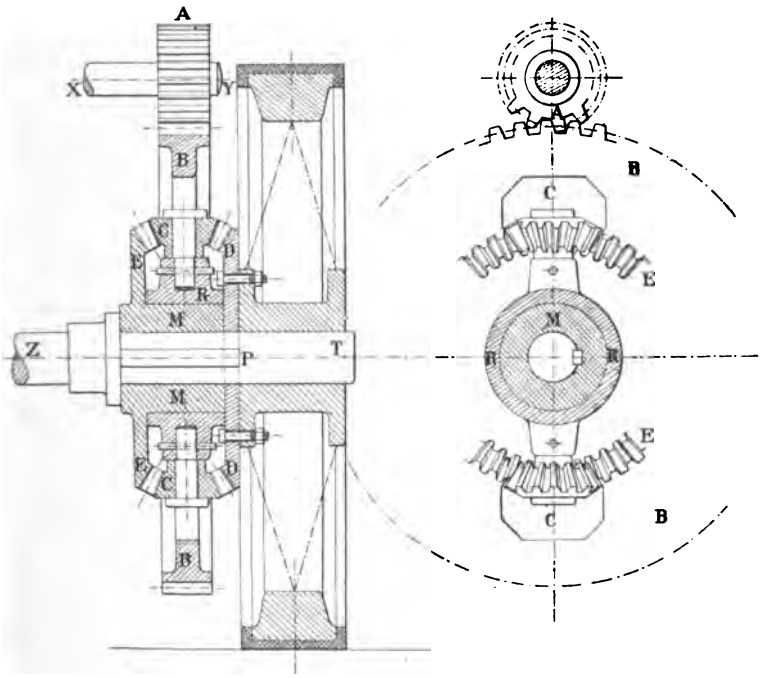


Fig. 173.

On peut d'ailleurs établir *a priori* ce résultat. A un virage, les pignons satellites se mettant en mouvement autour de leurs arbres, si la roue R_0 calée sur l'arbre A_0 a le plus petit chemin à parcourir, ceux qui portent les numéros 1, 3, 5, tournent dans le sens de la flèche *f* de

Digitized by Google

manière à diminuer la vitesse angulaire de cette roue tandis que ceux qui portent les numéros 2, 4, 6 et qui engrènent deux à deux avec les précédents tournent en sens contraire et augmentent ainsi la vitesse angulaire de la roue R_1.

127. Différentiel de Pecqueur. Machine routière d'Aveling et Porter. — Le différentiel à roues coniques inventé par Pecqueur en 1828, analogue au train épicycloïdal décrit § 128, comprenait un levier constitué par une poulie à gorge; l'un de ses rayons servait d'axe au pignon satellite R_1 qui engrenait avec les roues R_0 et R_2.

Dans la locomotive routière d'Aveling et Porter (fig. 173) une roue A calée sur l'arbre moteur XY communique son mouvement à une roue B folle autour de l'essieu. Cette dernière entraîne dans son mouvement deux roues coniques C, C montées sur deux de ses rayons et qui engrènent d'une part avec deux autres roues coniques D, D invariablement liées à l'une des roues motrices folle autour de l'arbre ZT, d'autre part avec les roues E, E reliées, comme l'indique la figure, à l'arbre ZT sur lequel se trouve calée l'autre roue motrice par l'intermédiaire d'un manchon M et d'une clavette P. Nous retrouvons donc dans cette machine un dispositif analogue au différentiel à roues coniques.

Digitized by Google

SECONDE CLASSE

APPAREILS OÙ LE SENS DE LA TRANSMISSION EST CONSTANT MAIS OÙ LE RAPPORT DES VITESSES DES ORGANES EN LIAISON EST VARIABLE.

—

CHAPITRE XII

—

SURFACES ROULANTES

128. Problème. — *Transmettre le mouvement d'un arbre moteur* O, *perpendiculaire au plan de la figure et qui tourne dans le sens de la flèche*

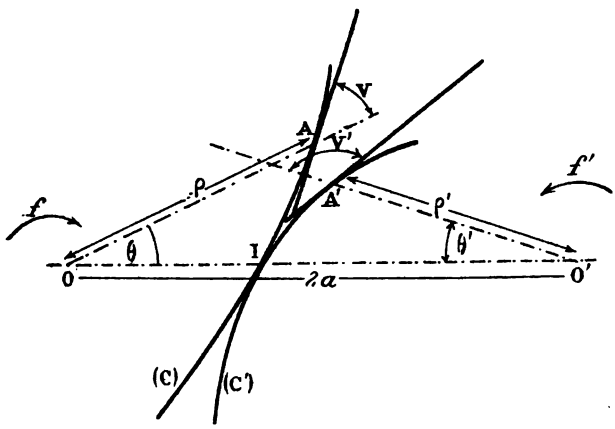


Fig. 174.

f avec une vitesse angulaire ω, *à un arbre* O' *qui lui est parallèle de telle sorte qu'il tourne dans le sens de la flèche f' avec une vitesse angulaire* ω' *en calant sur les deux arbres deux corps* A *et* A' *qu'on met en contact et*

Digitized by Google

dont on détermine la nature en s'imposant que le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ *soit une fonction connue du temps et que les vitesses relatives de glissement des points de contact de l'un des corps par rapport à l'autre soient les plus petites possible.*

Comme nous l'avons établi en cinématique théorique § 198, à un instant quelconque, le mouvement relatif du corps A′ par rapport au corps A, n'est autre qu'une rotation parallèle aux deux premières autour d'un axe projeté sur le plan de la figure en un point I de la droite OO′ déterminé par la relation :

$$\frac{OI}{O'I} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Or, comme par hypothèse, le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est variable ; il en est par suite de même des longueurs OI et O′I dont la somme, égale à OO′ ou $2a$, reste toutefois constante. Les lieux de l'axe instantané de rotation dans les corps A et A′ qui sont deux cylindres, non de révolution, en contact, à chaque instant, suivant l'axe instantané du mouvement relatif, fournissent une solution du problème posé.

Il est, en effet, facile de reprendre un raisonnement identique à celui que nous avons développé en cinématique théorique § 201 et d'établir qu'ils satisfont à la seconde hypothèse de l'énoncé.

Leurs directrices (C) et (C′), étant des courbes roulantes, sont assujetties à des conditions que nous allons traduire algébriquement.

Rapportons, à cet effet, la directrice (C) au pôle O et à l'axe polaire OI, la directrice (C′) au pôle O′ et à l'axe polaire O′I et supposons qu'à l'origine du mouvement, I soit leur point de contact. A une autre époque t, par exemple, elles devront venir en contact sur la ligne OO′ par deux points homologues A et A′ satisfaisant à la relation:

$$\widehat{IA} = \widehat{IA'}.$$

Si donc, nous désignons par ρ et θ, ρ' et θ' les coordonnées polaires des points A et A′, nous aurons les relations :

$$\int_0^{\theta} d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = \int_0^{\theta'} d\rho'^2 + \rho'^2 d\theta'^2 \qquad (1)$$

$$\rho + \rho' = 2a \qquad (2)$$

et

$$V + V' = 180°.$$

Cette dernière peut s'écrire :

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho} = -\frac{\rho' d\theta'}{d\rho'}.$$

Digitized by Google

Mais, comme en différentiant les deux membres de l'équation (1), nous obtenons :

$$d\rho' = -d\rho,$$

elle devient, finalement :

$$\rho d\theta = \rho' d\theta'. \qquad (3)$$

Toutefois, il est facile d'établir que l'équation (1) est une conséquence des deux autres (2) et (3). Ces dernières, en effet, nous permettent de poser les suivantes :

$$d\rho^2 = d\rho'^2$$
$$\rho^2 d\theta^2 = \rho'^2 d\theta'^2$$

desquelles nous déduisons :

$$d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = d\rho'^2 + \rho'^2 d\theta'^2.$$

Les deux fonctions $\int_0^{\theta} d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$, $\int_0^{\theta'} d\rho'^2 + \rho'^2 d\theta'^2$, qui ont des différentielles égales ne diffèrent donc que par une constante et comme pour le point I de contact des deux courbes les deux arcs $\widehat{IA}$ et $\widehat{IA'}$ sont tous deux nuls, il en est de même de cette constante, et les deux fonctions sont égales.

Il en résulte que les coordonnées polaires ρ . θ, ρ'. θ', de deux points homologues quelconques A et A' des deux courbes roulantes (C) et (C'), sont liées par les relations :

$$\rho + \rho' = 2a$$
$$\rho d\theta = \rho' d\theta'.$$

129. Problème. — *Montrer que l'on peut déterminer et construire le cylindre* (C') *dès que le cylindre* (C) *est connu.*

Puisque le cylindre C est donné, sa directrice est une courbe connue d'équation :

$$\rho = f(\theta).$$

Comme entre les coordonnées polaires ρ et θ de l'un de ses points A et celles ρ' et θ' de son homologue A', existent les relations précédentes ; il en résulte que :

$$\rho' = 2a - \rho = 2a - f(\theta) \qquad (1)$$
$$d\theta' = \frac{\rho d\theta}{\rho'} = \frac{f(\theta) d\theta}{2a - f(\theta)}.$$

Par suite :

$$\theta' = \int \frac{f(\theta) d\theta}{2a - f(\theta)} + C^{te},$$

équation que nous pouvons encore écrire en supposant l'intégrale effectuée :

$$\theta' = F(\theta) + C^{te}.$$

Digitized by Google

Or, comme pour $\theta = 0$, $\theta' = 0$, la constante C est déterminée et a pour valeur $-F(0)$. L'équation précédente peut donc s'écrire :

$$\theta' = F(\theta) - F(0). \qquad (2)$$

Si, alors, nous éliminons θ entre les équations (1) et (2), nous obtenons l'équation :

$$\rho' = g(\theta')$$

de la directrice (C').

Pour la construire à l'époque où la directrice (C) occupe la position indiquée sur la figure 175, remarquons tout d'abord que le point I lui appartient. Pour déterminer l'homologue A' d'un point A infiniment voisin de I, il suffit d'exprimer tout d'abord sur le graphique que la somme OA + O'A' est égale à OO' ce qui revient à décrire la circonférence de centre O' et de rayon $2a - OA$ et à la considérer comme un premier lieu du point cherché. De plus comme les arcs $\widehat{IA}$, $\widehat{IA'}$ doivent être égaux et qu'ils sont tous deux infiniment petits, nous pouvons les confondre avec leurs cordes et regarder la circonférence de centre I et de

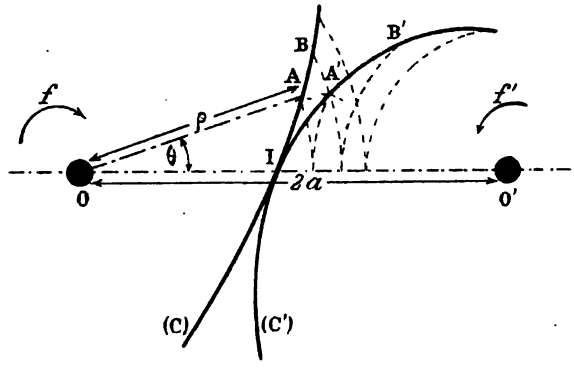


Fig. 175.

rayon IA comme un second lieu du même point. Il est donc déterminé par leur intersection.

En faisant ensuite jouer aux points A et A' le rôle du point I et répétant les constructions précédentes, nous déterminons un second point B' de la courbe (C') homologue du point B et ainsi de suite.

130. Problème. — *Transmettre le mouvement d'un arbre moteur projeté en* O *sur le plan de la figure et qui tourne avec une vitesse angulaire* ω *qui est une fonction connue du temps :* $\omega = f(t)$, *à un arbre* O' *qui lui est parallèle de telle sorte qu'il tourne avec une vitesse angulaire* ω' *satisfaisant à l'équation :* $\omega' = g(t)$.

Digitized by Google

Si les deux directrices (C) et (C') étaient définies, le problème serait résolu. Or, comme la connaissance de (C) permet d'obtenir (C') le problème posé comporte une seule inconnue: la courbe (C), par exemple.

Pour l'obtenir, remarquons que par définition même de la vitesse angulaire, nous avons:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = f(t).$$

Par suite:

$$\theta = \int f(t)\,dt + C^{te}$$

équation que nous pouvons écrire, par analogie avec ce qui précède:

$$\theta = F(t) - F(0) \qquad (1)$$

en posant:

$$F(t) = \int f(t)\,dt.$$

D'autre part, comme d'après l'énoncé:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{f(t)}{g(t)},$$

il en résulte que:

$$\frac{\rho}{2a - \rho} = \frac{f(t)}{g(t)}.$$

Cette équation, résolue par rapport à ρ, conduit à la suivante:

$$\rho = G(t). \qquad (2)$$

Si donc nous éliminons t entre les équations (1) et (2), celle:

$$\rho = H(\theta)$$

qui en résulte correspond à la directrice (C) cherchée.

131. Problème. — *Établir que deux cylindres qui admettent pour directrices deux ellipses égales* E_1 *et* E_2 *et qui tournent respectivement autour d'axes projetés sur le plan de la figure aux foyers* F_1 *et* F_2 *sont roulants et étudier les variations du rapport* $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *des vitesses angulaires.*

a) Nous donnerons une solution géométrique de la première partie du problème.

Les deux ellipses égales E_1 et E_2, placées en contact au point I, sont symétriques par rapport à leur tangente commune IT et deux de leurs points homologues M_1 et M_2 satisfaisant à la relation:

$$\widehat{IM_1} = \widehat{IM_2}$$

le sont aussi.

Digitized by Google

Par suite :

$$M_1F_1 + M_2F_2 = M_1F_1 + M_1F'_1 = 2a.$$

$2a$ désignant la longueur du grand axe de chacune des ellipses ou bien encore la distance F_1F_2.

D'autre part, si nous désignons par $\widehat{V_1}$ et $\widehat{V_2}$ les angles que font les tangentes M_1T_1, M_2T_2 avec les rayons vecteurs des points M_1 et M_2, par suite de la symétrie dont nous venons de parler nous avons :

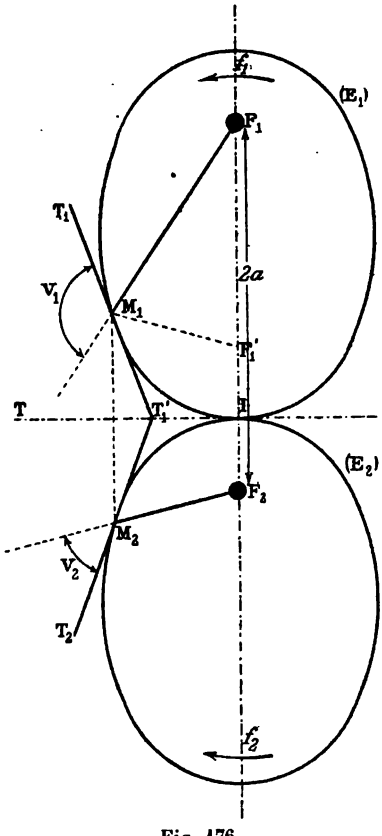


Fig. 176.

$$\widehat{V_2} = \widehat{T'_1M_1F'_1}.$$

Mais, la propriété de la tangente en un point d'une ellipse nous permet d'écrire :

$$\widehat{T'_1M_1F'_1} = \widehat{T_1M_1F_1}.$$

Il en résulte alors que :

$$\widehat{V_1} + \widehat{V_2} = \widehat{V_1} + \widehat{T_1M_1F_1} = 180°.$$

Les deux ellipses considérées sont donc bien des courbes roulantes.

b) *Étude des variations du rapport* $\frac{\omega_1}{\omega_2}$. — La relation :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

qui lie, à un même instant, les vitesses angulaires des arbres F_1 et F_2 peut s'écrire dans le cas actuel :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{2a - \rho_2} = \frac{1}{\frac{2a}{\rho_2} - 1}.$$

Pour fixer les idées, supposons que l'ellipse (E_2), menante dans le sens de la flèche f_2, tourne d'un mouvement uniforme autour de l'arbre F_2. Pendant *sa première demi-révolution*, ρ_2 allant en croissant

Digitized by Google

de la valeur $a-c$ à la valeur $a+c$, $\frac{2a}{\rho_2}$ diminue et le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ augmente ; le mouvement de rotation de l'arbre F_1 est donc *varié accéléré* et $\omega_2 \frac{a-c}{a+c}$, $\omega_2 \frac{a+c}{a-c}$ sont les valeurs extrêmes de sa vitesse angulaire. Pendant *sa deuxième demi-révolution*, ρ_2 allant en décroissant de la valeur $a+c$ à la valeur $a-c$, le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ diminue ; le mouvement de l'arbre F_1 est alors *varié retardé* et $\omega_2 \frac{a+c}{a-c}$, $\omega_2 \frac{a-c}{a+c}$ sont les valeurs extrêmes de sa vitesse angulaire. L'on retrouve ensuite les mêmes phases, en sorte que le mouvement de l'arbre à conduire est *périodique* et correspond à une période de valeur $\frac{\pi}{\omega_1}$.

Pendant la première demi-révolution, les rayons vecteurs de l'ellipse menante allant en croissant, elle force l'autre à tourner ; mais, pendant la demi-révolution suivante, il n'en est plus de même et l'on est obligé, pour remédier à cet inconvénient, d'armer de dents les deux cylindres elliptiques correspondants. L'on obtient alors un engrenage connu sous le nom *d'engrenage elliptique*.

132. Engrenage elliptique. — Le mouvement relatif de l'une des

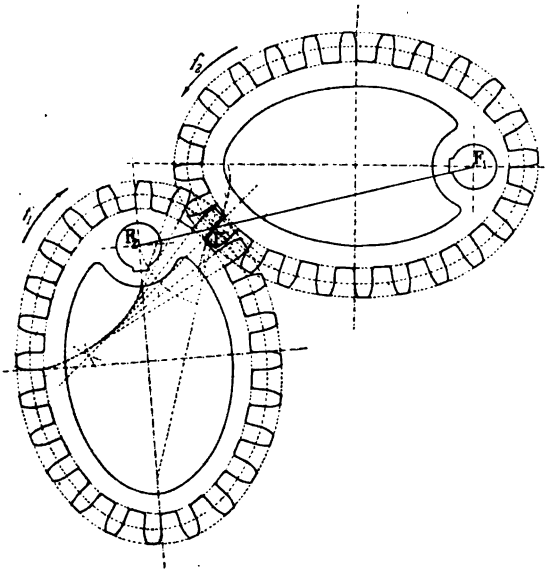


Fig. 177.

ellipses par rapport à l'autre étant un roulement, les méthodes des

Digitized by Google

enveloppes et des roulettes exposées § 12 sont applicables dans la recherche des profils des dents des deux roues. Nous ne les reprendrons pas et nous nous contenterons d'appliquer sur la figure la construction de Poncelet, dans le cas où les flancs des dents sont rectilignes et normaux aux ellipses primitives; nous la répéterons toutefois pour chaque dent par suite des variations que subit la courbure d'une ellipse lorsqu'on passe de l'un de ses points au suivant.

133. Application à la bicyclette[1]. — Pour établir une relation entre l'effort utile développé par un cycliste et le développement de sa machine, MM. Caille et Blanchet ont procédé de la façon suivante : Sur

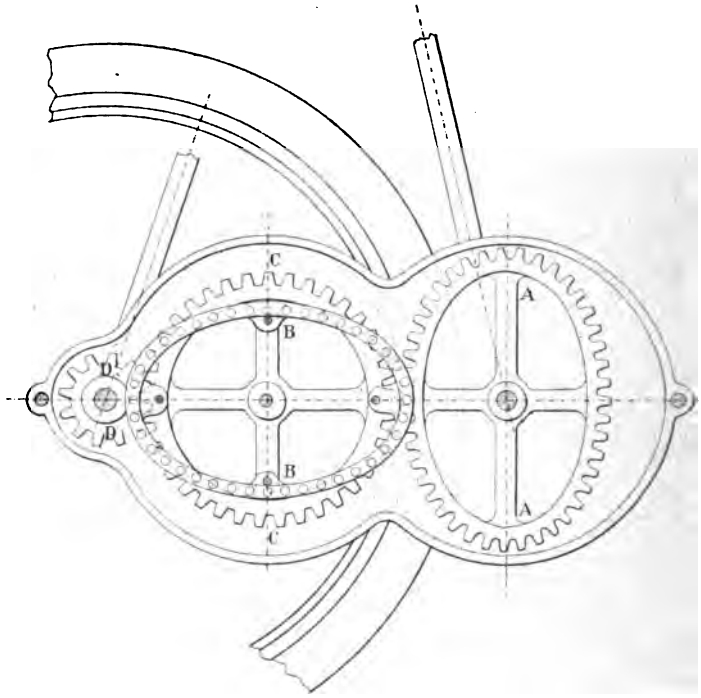


Fig. 178.

l'axe de la pédale, ils ont calé une roue elliptique A qui engrène avec sa conjuguée B. Cette dernière invariablement liée à une roue cylindrique C lui communique son mouvement et elle le transmet à son tour à une roue cylindrique D calée sur l'axe de la roue motrice.

L'équation :

$$\omega' = \omega \times \frac{\rho}{\rho'}$$

1. Génie civil.

Digitized by Google

établie précédemment montre que, lorsque la manivelle se trouve dans une position verticale, ω et ρ sont minima et ρ' maximum ; la machine tourne donc avec sa plus faible vitesse. Au contraire, après un quart de tour, la manivelle devient horizontale, position la plus favorable pour la transmission de l'effort développé par le cycliste ; ω et ρ sont alors maxima et ρ' minimum et la machine tourne avec sa plus grande vitesse.

Il en résulte qu'au maximum et au minimun de l'effort transmis par le cycliste correspond le maximum et le minimum de vitesse de la machine.

134. Surfaces dérivées. — Soient :

$$\rho = f(\theta), \quad \rho' = g(\theta'.)$$

les équations des directrices de deux cylindres roulants assujetties à vérifier, par conséquent, les relations :

$$\rho + \rho' = 2a \qquad (1)$$

$$\rho d\theta = \rho' d\theta'. \qquad (2)$$

Sans toucher aux rayons vecteurs, faisons correspondre aux angles θ et θ' les angles $\frac{\theta}{k}$, $\frac{\theta'}{k'}$; nous obtenons alors deux nouvelles équations :

$$\rho = f\left(\frac{\theta}{k}\right), \quad \rho' = g\left(\frac{\theta'}{k}\right),$$

qui sont celles de deux *courbes dérivées* des précédentes et qui donnent naissance à deux nouveaux cylindres roulants.

Pour l'établir, il suffit de montrer que les équations :

$$\rho + \rho' = 2a,$$

$$\rho d\left(\frac{\theta}{k}\right) = \rho' d\left(\frac{\theta'}{k}\right),$$

sont vérifiées en vertu des hypothèses.

Comme la dernière peut s'écrire :

$$\rho d\theta = \rho' d\theta'$$

ce sont ces hypothèses elles-mêmes.

135. Surfaces roulantes dérivées des cylindres elliptiques. — Faisons une application de la théorie qui précède au cas où les courbes roulantes étant les ellipses étudiées précédemment, $k = 2$.

Divisons, comme l'indique la figure, en huit parties égales l'angle $\widehat{IF_2a_8} = 180°$ et son correspondant $\widehat{I'F'_2a'_8} = 90°$; puis sur un rayon

Digitized by Google

quelconque $F'_2a'_6$, par exemple, portons de F'_2 en a'_6 la longueur F_2a_6 et répétons cette construction pour tous les rayons vecteurs. En joignant par un trait continu tous les points obtenus, analogues au point a'_6 que nous venons de déterminer, nous obtenons une courbe (E'_2)

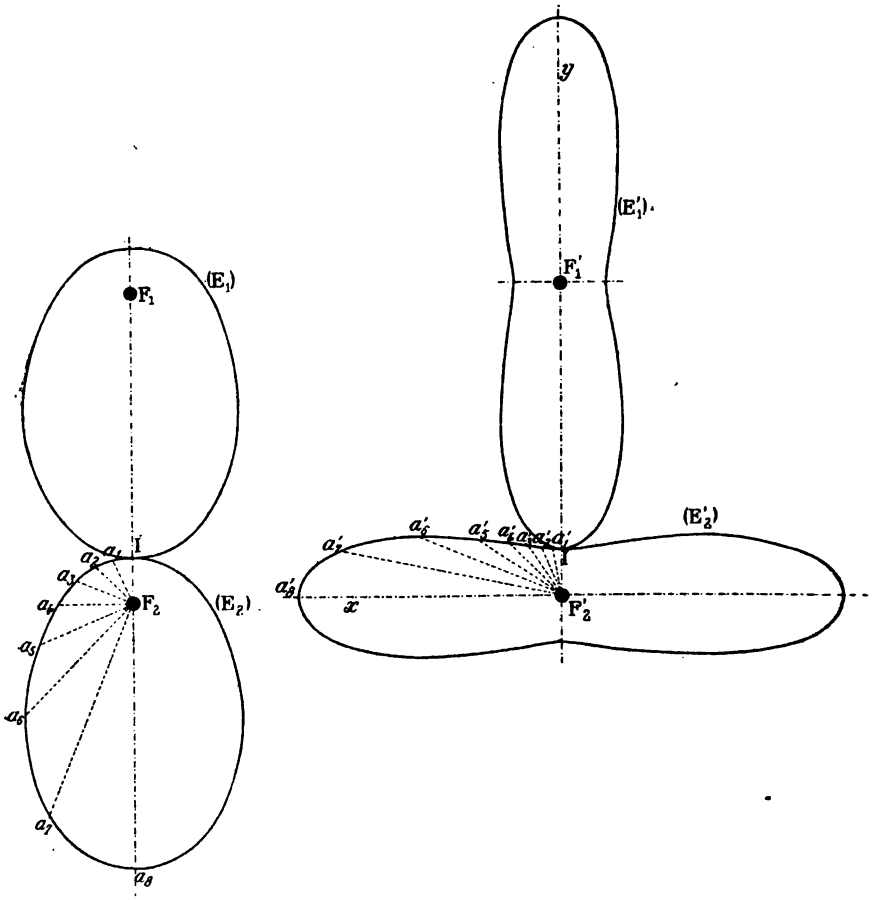


Fig. 179.

symétrique par rapport aux droites F'_2x et F'_2y ; associée à celle (E'_1) déduite de l'ellipse (E_1) par un procédé identique, elles fournissent les directrices de deux nouveaux cylindres roulants. Utilisés dans la transmission du mouvement de l'arbre F'_2 à l'arbre F'_1, ils conduisent à un rapport de vitesses angulaires variant de $\frac{a-c}{a+c}$ à $\frac{a+c}{a-c}$ pour un quart de tour et non plus pour un demi-tour.

Digitized by Google

136. Roue excentrée engrenant avec une roue à peu près elliptique. — Dans ce mécanisme, l'une des courbes roulantes est une circonférence tournant autour d'un arbre projeté sur le plan de la figure en un point O différent de son centre C ; l'autre, à peu près elliptique, s'obtient par des considérations, analogues à celles exposées § 132. Elles nous conduisent aux constructions indiquées sur la figure (180) pour le cas où l'on fait correspondre à un demi-tour de la première, un quart de tour de la seconde.

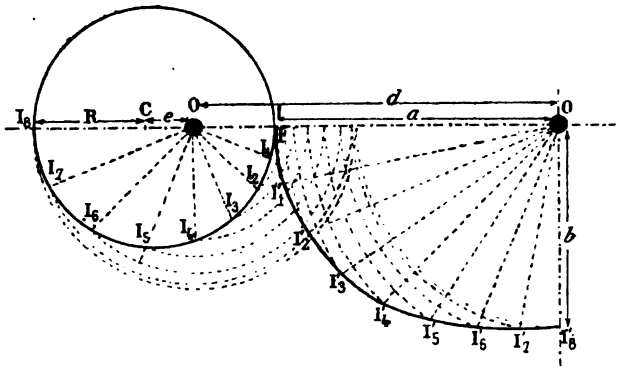


Fig. 180.

Les axes de cette seconde roue que nous désignons par $2a$ et $2b$ sont fonctions de la distance d des arbres O et O′ et de l'excentricité e de la première roue.

En effet, la longueur πR de la demi-circonférence devant être égale à la longueur $\frac{\pi(a+b)}{4}$ du quart de l'ellipse, nous obtenons une première équation :

$$a + b = 4R.$$

D'autre part, les constructions indiquées sur la figure, nous donnent les suivantes :

$$a = d - (R - e)$$
$$b = d - (R + e)$$

desquelles nous déduisons :

$$a - b = 2e.$$

Par suite :

$$a = 2R + e$$
$$b = 2R - e,$$

et :

$$d = 3R.$$

Si, donc, nous nous donnons la distance d des centres de rotation et

Digitized by Google

l'excentricité e, le rayon R de la roue excentrée sera $\frac{d}{3}$ et les axes de l'ellipse auront pour valeurs :

$$a = \frac{2d}{3} + e$$

$$b = \frac{2d}{3} - e.$$

Le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ des vitesses angulaires varie par demi-révolution de l'arbre moteur O entre les limites :

$$\frac{\frac{2d}{3} + e}{\frac{d}{3} - e} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{2d}{3} - e}{\frac{d}{3} + e}.$$

DESCRIPTION DE QUELQUES TRANSMISSIONS A VITESSE VARIABLE[1].

137. Engrenage à retour rapide. — Dans certaines machines-outils, le plateau a un mouvement plus lent pendant la période où l'outil

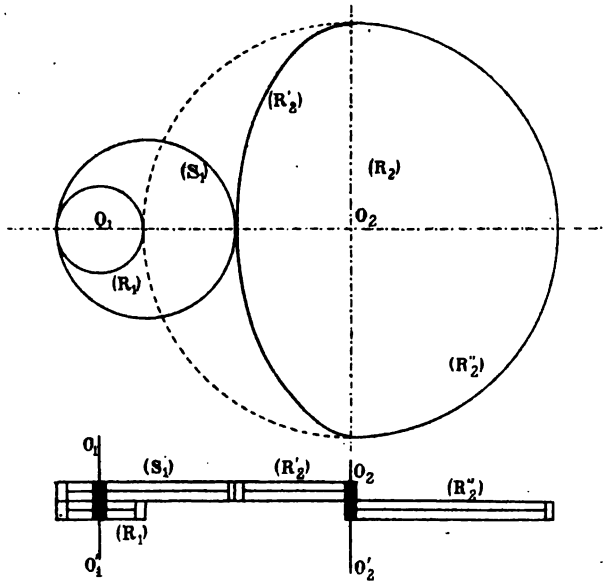


Fig. 181.

travaille que pendant celle où il n'exerce aucune action sur la pièce à façonner ; d'où le nom de *mécanisme à retour rapide* donné au dispositif qui permet d'obtenir ce résultat.

1. Génie civil.

Digitized by Google

Dans le cas actuel, il se compose de deux roues R_1 et S_1 venues de fonte d'une seule pièce et calées sur l'arbre moteur O_1 qui coïncide avec l'axe de symétrie de la première. Elles engrènent, comme l'indique la figure : la première avec la partie demi-circulaire R'_2 d'une roue R_2 ; la seconde avec la partie demi-elliptique R'_2 de cette même roue laquelle se trouve calée sur l'arbre O_2 à conduire.

En admettant que l'arbre moteur tourne avec une vitesse angulaire constante ω_1, la formule :

$$\omega_2 = \omega_1 \times \frac{r_1}{r_2},$$

valable dans le cas qui nous occupe puisque les surfaces primitives de l'engrenage roulent l'une sur l'autre, montre que la vitesse angulaire ω_2 reste constante lorsque l'engrènement se produit entre les deux roues circulaires R_1 et R'_2 et qu'elle devient au contraire variable et croissante tout d'abord dès que la roue excentrée S_1 entre en prise avec la partie elliptique R''_2. A cette dernière phase correspond la période de retour du plateau.

138. Système Osgood. — Dans le système Osgood, le mouvement de l'arbre moteur X_1Y_1 se transmet à l'arbre à conduire X_2Y_2 par l'intermédiaire de deux rouleaux de friction F et G, inclinés comme l'indique la figure 182, et en contact, le premier avec les deux disques D_1 et D_2 calés respectivement sur le premier et le second arbre ; le second avec les deux disques D_1 et D'_2 calés aussi sur les deux mêmes arbres. Le mécanisme est d'ailleurs symétrique par rapport au plan moyen du disque D_1 et les jantes des deux rouleaux de friction sont disposées de telle façon qu'à chaque instant, celle du rouleau F, par exemple, touche les deux disques D_1 et D_2 par les points P_1 et P_2 symétriquement placés par rapport à son centre.

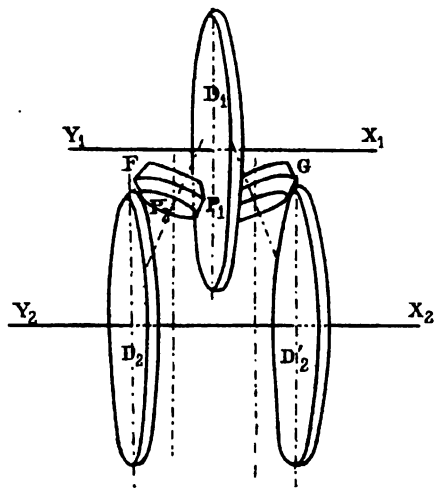


Fig. 182.

La position des deux rouleaux pouvant varier tout en conservant la

Digitized by Google

symétrie précitée, il nous est facile d'établir que lorsque l'arbre moteur tourne d'un mouvement uniforme, l'arbre à conduire prend un mouvement varié.

Désignons, en effet, par ω_1, ω_2, ω, les vitesses angulaires, à un même instant, des disques D_1, D_2 et du rouleau F, par r_1 et ρ les distances du point P_1 à l'axe X_1Y_1 et à celui du rouleau et par r_2 la distance du point P_2 à l'axe X_2Y_2; nous pouvons alors poser les équations:

$$\omega_1 r_1 = \omega\rho,$$

$$\omega_2 r_2 = \omega\rho,$$

desquelles nous déduisons la suivante:

$$\omega_2 = \omega_1 \times \frac{r_1}{r_2}.$$

Or, dans le cas où r_1 croît, r_2 décroît et le mouvement de l'arbre à conduire est varié accéléré; dans le cas contraire, il est varié retardé.

139. Système Richards et Cie. — La figure 183 indique le dispositif à vitesse variable employé par MM. Richards et Cie dans les tours verticaux.

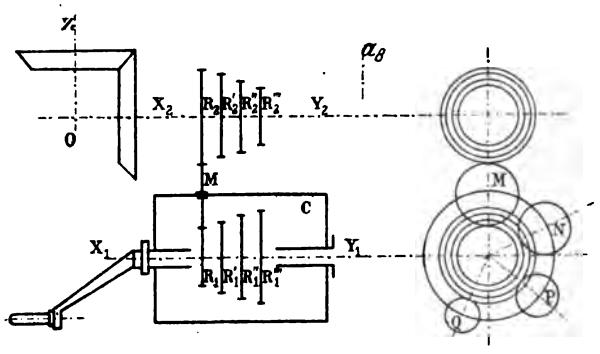


Fig. 183.

A chaque instant, l'une des quatre roues R_1, R'_1, R''_1, R'''_1 calées sur l'arbre moteur X_1Y_1, peut engrener avec une de celles R_2, R'_2, R''_2, R'''_2 qui se trouvent calées sur l'arbre X_2Y_2 parallèle au premier et qui, par roues d'angle, transmet son mouvement à l'arbre OZ à conduire. Pour obtenir l'engrènement dont nous venons de parler, on dispose sur quatre génératrices d'un cylindre C, fou sur l'arbre X_1Y_1, quatre roues folles M, N, P, Q dont les plans moyens correspondent respectivement à ceux

Digitized by Google

des couples (R_1. R_2), (R'_1. R'_2), (R''_1. R''_2), (R'''_1. R'''_2). Suivant la vitesse qu'on veut communiquer à l'arbre à conduire, l'on amène l'une d'elles en prise, avec le couple correspondant. Un ressort d'arrêt permet alors d'obtenir la fixité du cylindre C.

Si, comme l'indique la figure, les rayons des roues de la série R_1 vont en augmentant tandis que ceux des roues de la série R_2 vont en diminuant, la formule :

$$\omega_2 = \omega_1 \times \frac{r_1}{r_2}$$

établie § 7, montre que le mouvement de l'arbre à conduire est varié accéléré, si l'on passe du couple (R_1. R_2) aux couples suivants et varié retardé dans le cas contraire.

140. Mécanisme employé en Amérique par la Rhodes Company pour la commande des souffleries d'orgues. — Le mécanisme employé en Amérique pour la commande des souffleries d'orgues se compose d'un arbre moteur X_1Y_1 communiquant son mouvement

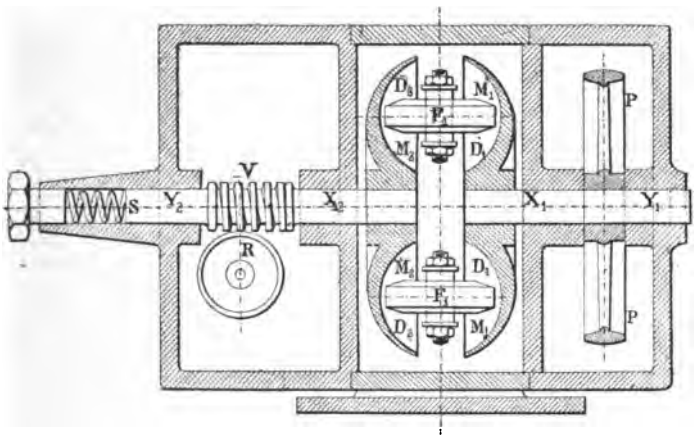


Fig. 184.

aux disques demi-sphériques D_1, D_1 par l'intermédiaire d'une poulie P ; ceux-ci, à leur tour, le communiquent aux disques D_2, D_2, par l'intermédiaire de galets de friction F_1, F_1, symétriquement disposés par rapport à l'arbre X_1Y_1; le contact se trouve maintenu entre ces organes par un ressort S. Les disques D_2, D_2 font corps avec un arbre X_2Y_2 sur lequel se trouve filetée une vis V qui engrène avec une roue R laquelle communique son mouvement à l'organe à déplacer.

Pour établir que ce mécanisme est à vitesse variable, supposons qu'on

Digitized by Google

incline le galet F_1, de rayon R, de manière à ce qu'il vienne toucher les disques D_1, D_2 par les points M_1, M_2 distants des arbres X_1Y_1, X_2Y_2 de longueurs R_1 et R_2 et désignons par ω, ω_1, ω_2 les vitesses angulaires du galet et des arbres précédents. Nous pouvons alors écrire :

$$\omega_1 R_1 = \omega R,$$
$$\omega_2 R_2 = \omega R ;$$

et par suite :

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2.$$

De cette équation, nous déduisons :

$$\omega_2 = \omega_1 \times \frac{R_1}{R_2}.$$

Or, sur la figure, R_1 estplus grand que R_2, et comme de plus, la vitesse angulaire ω_1 est constante, par hypothèse, l'arbre X_2Y_2 tourne plus vite que l'arbre X_1Y_1. La vitesse, fonction de l'inclinaison des galets, est donc bien variable.

141. Engrenages intermittents. — Les mouvements discontinus de certains organes de machines peuvent s'obtenir par bien des procédés ; nous nous contenterons pour l'instant d'indiquer les deux suivants :

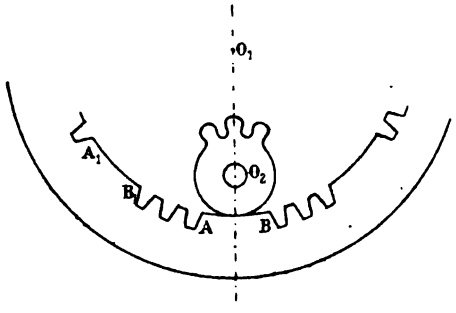


Fig. 185.

a) L'engrenage correspondant à la figure 185 permet de communiquer à la roue O_1 un mouvement circulaire avec phases de repos. Il se compose de deux roues intérieures dont l'une O_2 porte seulement trois dents consécutives tandis que l'autre O_1 porte des séries de trois dents séparées par des arcs égaux $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A_1B_1}$, ... qui correspondent à l'arc de conduite de l'engrenage.

Au commencement et à la fin de chaque période de repos, la roue à conduire occupe donc une position analogue à celle indiquée sur la figure, et la roue O_1 se met en mouvement, quand une dent de l'une des séries précitées vient engrener avec sa conjuguée sur la roue O_2.

b) La figure 186 est relative au cas où la roue motrice O_1 est petite et tourne avec une grande vitesse dans le sens de la flèche f_1, par

Digitized by Google

exemple. L'ergot E qu'elle porte partant de la position A_1, n'exerce tout d'abord aucune action sur la dent conjuguée de la roue O_2 laquelle reste par conséquent immobile jusqu'au moment où il vient occuper la position A_2; après quoi, agissant sur le flanc A_2B_2, il force cette roue à tourner jusqu'au moment où la dent considérée a pris la place de la précédente. Il occupe alors de nouveau la position A_1 et les mêmes phases de repos et de mouvement se reproduisent.

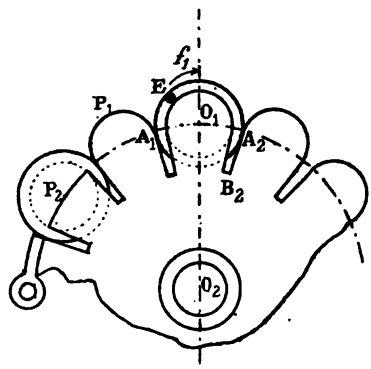


Fig. 186.

Pour la denture de la roue O_2, on peut employer le profil demi-circulaire P_1 ou bien encore le profil P_2 moins onéreux.

142. Système Clément. — *Changement de vitesse adapté aux bicyclettes « CLÉMENT ».* — Le mécanisme du changement de vitesse de la bicyclette « Clément » est logé à l'intérieur du moyeu arrière qui extérieurement a absolument l'aspect ordinaire.

Le moyeu (M) porte sur la face où se trouve ordinairement vissé le pignon de chaîne, 4 axes tirés de la masse, disposés en croix à égale distance du centre et qui servent de pivot à 4 petits pignons satellites (E) qui roulent fous sur les dits axes.

Le pignon de la chaîne (P) est évidé et porte à l'intérieur une denture qui lui permet, une fois mis en place sur le moyeu, de venir engrener avec les 4 petits pignons satellites (E).

Un pignon allongé (H) intercalé dans l'espace laissé libre entre les 4 satellites engrène toujours avec ceux-ci sur une portion de sa longueur, l'axe (C) du moyeu qui traverse le pignon (H) est fixé sur la fourche arrière de la bicyclette.

Le pignon de chaîne (P) étant mis en place sur le moyeu, si nous le faisons tourner, il actionnera par sa denture intérieure les 4 satellites qui étant fous entraîneront à leur tour le pignon (H), le moyeu restera immobile; mais si par un moyen mécanique quelconque nous rendons le pignon (H) solidaire du moyeu, tout l'ensemble formant bloc, le moyeu sera entraîné par le pignon de chaîne à la vitesse de celui-ci comme un moyeu ordinaire. Dans ces conditions, la multiplication sera celle donnée par le rapport existant entre la roue dentée du pédalier et le pignon de chaîne.

Digitized by Google

Pour arriver à ce résultat un manchon (A) engrène intérieurement avec le pignon (H), il est taillé à sa partie extérieure et engrène également avec une denture intérieure du moyeu.

Cette denture est constituée par des petits cliquets (x poussés par des ressorts) qui engrènent lorsque c'est le manchon qui les actionne mais qui échappent lorsque le moyeu tourne plus vite que le manchon; nous obtenons donc la roue libre lorsque nous sommes en grande vitesse.

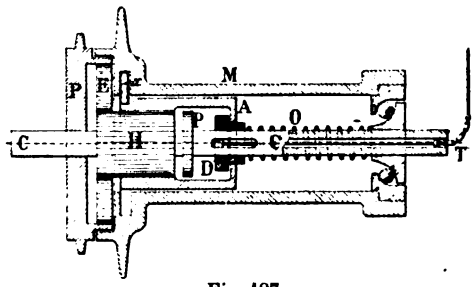


Fig. 187.

Le manchon (A) n'est taillé intérieurement que sur la moitié de sa longueur.

Dans la position qui nous occupe, tous les organes formant bloc, si nous déplaçons sur l'axe le manchon (A) et que nous le fassions échapper de la denture intérieure que porte le moyeu, le dit manchon commandé par le pignon (H) tournera fou sur l'axe fixe du moyeu, mais si nous immobilisons le pignon (H) sur cet axe, la roue dentée (P) commandée par la chaîne forcera, par sa denture intérieure, les 4 satellites à tourner sur leurs axes et à rouler autour du pignon (H) rendu fixe.

Il en résultera que l'ensemble des 4 pignons satellites dont les axes font corps avec le moyeu entraîneront celui-ci mais à une vitesse moindre que celle du pignon de chaîne, ce qui revient à dire que lorsque le pignon de chaîne aura décrit une révolution complète, le moyeu n'aura pas encore terminé sa révolution, nous obtenons donc ainsi la démultiplication.

Pour immobiliser le pignon (H) sur l'axe central du moyeu, il nous suffira d'immobiliser le manchon (A) et de le laisser engrener avec le pignon (H); pour arriver à ce résultat, un petit pignon (F) de même denture et de même diamètre que le pignon (H) fait corps avec l'axe central du moyeu; si nous déplaçons le manchon (A) sur l'axe de façon à amener sa denture intérieure en prise avec le pignon (F) nous aurons obtenu le résultat désiré.

Le réglage du mécanisme est tel qu'en déplaçant le manchon (A) pour le faire engrener intérieurement avec le pignon (F), on dégrène simultanément le manchon du moyeu.

Dans les explications précédentes, nous avons vu que le manchon

Digitized by Google

(A) était la seule pièce qui dans tout le mécanisme devait se déplacer le long de l'axe du moyeu.

Le dispositif de commande de ce manchon est très ingénieux : l'axe central (C) est creux et dans son intérieur se trouve logée une petite tringle (T) qui se visse dans un ergot (R) formant croix avec elle. Les deux extrémités de cet ergot traversent deux fenêtres longitudinales pratiquées suivant les génératrices de l'axe du moyeu et viennent immobiliser une bague (D) qui par cet artifice peut coulisser le long de l'axe du moyeu mais ne peut tourner sur lui.

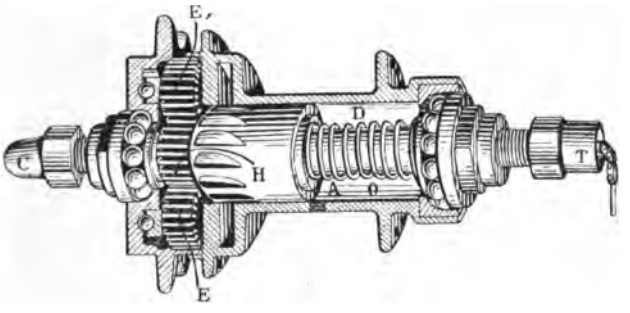


Fig. 188.

Le manchon (A) vient recouvrir la bague (D) et une petite portée ménagée à son extrémité à l'intérieur de la partie non dentée sert de butée à celle-ci.

On conçoit donc qu'en tirant la tringle, la bague coulissera sur l'axe du moyeu et entraînera le manchon avec elle. Un ressort à boudin (O) tend à repousser le manchon à sa position première aussitôt qu'on cesse toute traction sur la tringle (T).

Un câble souple en acier commandé par un petit levier pouvant se déplacer sur un secteur est relié à la tringle de commande intérieure de l'axe du moyeu.

Le secteur est fixé sur le tube supérieur du cadre de la machine à portée de la main.

Digitized by Google

TROISIÈME CLASSE

APPAREILS OÙ LE SENS DE LA TRANSMISSION EST VARIABLE ET OÙ LE RAPPORT DES VITESSES DES ORGANES EN LIAISON EST GÉNÉRALEMENT VARIABLE.

—

CHAPITRE XIII

—

CAMES ET EXCENTRIQUES

143. Définition. — Nous donnerons indifféremment le nom de *came ou d'excentrique* à toute pièce saillante calée sur un arbre et permettant de transformer son mouvement de rotation en un mouvement rectiligne alternatif. Dans certains cas, la came communique seulement à l'organe qu'on se propose de déplacer son mouvement direct et il prend celui de retour sous l'influence de la détente d'un ressort contre lequel il vient buter pendant la première partie de sa course.

144. Cames des marteaux frontaux, à bascule et à l'allemande. — Les cames de ces marteaux représentées par les figures suivantes, se distinguent les unes des autres par la manière même dont elles saisissent le levier fixé au marteau : c'est par l'extrémité située du côté du marteau dans le premier cas, par l'extrémité opposée dans le second, et enfin par le milieu dans le troisième.

En supposant le levier rectiligne, nous pouvons toujours assimiler son profil à celui du flanc d'une dent d'un engrenage extérieur en contact pendant la retraite avec celui de la came ; à ce dernier correspond donc un *arc d'épicycloïde*.

Digitized by Google

En pratique, entre la came et le levier, on dispose fréquemment un

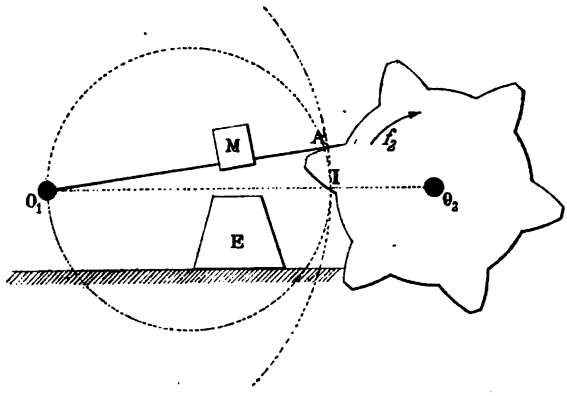


Fig. 189.

galet invariablement lié au levier. Assimilé à une dent d'engrenage à

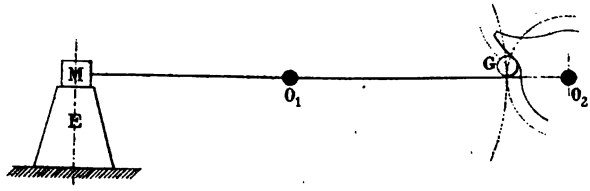


Fig. 190.

lanterne, extérieur dans le cas de la figure 190, intérieur dans le cas de

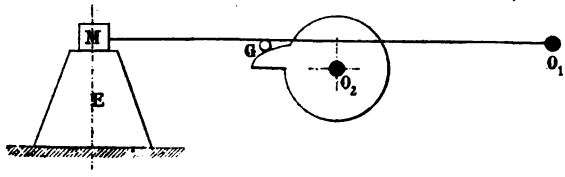


Fig. 191.

la figure 191, il conduit pour la came à un contour analogue à celui **trouvé** § 25, pour le profil des dents du rouet.

145. Distance de deux cames successives. — Pour que la **transmission** de mouvement soit assurée, il est nécessaire que le levier, **abandonné** par une came, ne puisse venir en prise avec la came **suivante** qu'après le retour du marteau sur l'enclume.

Digitized by Google

Pour traduire cette condition par une relation, désignons par a l'arc IA de retraite, par n le nombre de tours que fait en une minute, d'un mouvement uniforme, l'arbre porte-cames et par Z le nombre de cames distribuées sur le pourtour du disque.

La vitesse du point I, égale sur les deux circonférences O_1I et O_2I, ayant pour expression

$$\frac{\pi R_2 n}{30},$$

le temps mis par le levier pour se soulever a pour valeur :

$$t = \frac{30a}{\pi R_2 n}.$$

Celui qu'il met pour revenir à sa position première, sous l'influence de son propre poids, pourrait se calculer en appliquant, par rapport à l'axe projeté en O_1 sur le plan de la figure, le théorème des quantités de mouvements. Toutefois, comme il est inconnu des élèves auxquels s'adresse ce cours, nous nous bornerons à la recherche d'une solution approximative. Nous admettrons que le levier revient à sa position première après un temps égal à celui que mettrait un mobile pour parcourir un espace a d'un mouvement uniforme avec une vitesse égale à celle qu'il posséderait à la fin de sa course s'il tombait en chute libre de la hauteur $\frac{a}{2}$.

Dans ces conditions l'expression de t étant :

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

le levier se déplace pendant un temps qui a pour valeur :

$$\frac{30a}{\pi R_2 n} + \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Comme d'autre part la fraction $\frac{60}{nZ}$ exprime le temps mis par une came pour venir occuper la position de la précédente, l'équation cherchée peut s'écrire :

$$\frac{60}{nZ} = \frac{30a}{\pi R_2 n} + \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Elle donne pour l'expression de R_2 :

$$R_2 = \frac{30a}{\pi n \left(\frac{60}{nZ} - \sqrt{\frac{a}{g}}\right)}.$$

Digitized by Google

146. Cames des bocards et des pilons. — En agissant soit sur un mentonnet M, soit sur un galet G (fig. 192), la came des bocards ou des pilons permet de soulever verticalement une tige guidée T qui porte à sa partie inférieure une pièce en fonte P connue sous le nom de *sabot*.

Dans le premier cas, d'après les théories exposées relativement aux pignons et crémaillères, le profil de son contour est épicycloïdale ; c'est au contraire une développante de cercle dans le second.

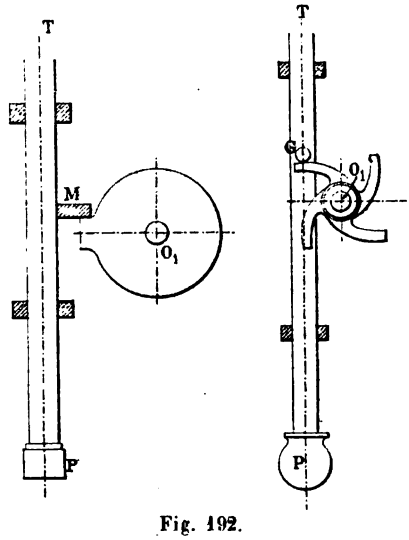


Fig. 192.

147. Remarque. — Dès que le poids de la tige ne s'oppose plus au mouvement de la came, sa vitesse s'accélère. L'on remédie à cet inconvénient en disposant, sur le contour porte-cames, plusieurs cames destinées à faire mouvoir plusieurs pilons et entrant en action les unes après les autres de telle sorte qu'à chaque instant une résistance s'oppose à l'accélération de la rotation de l'arbre O_1.

En faisant exception des cames que nous venons de décrire, nous diviserons l'étude de celles qui vont suivre en deux parties :

a) Études des *cames ou excentriques à galets ; b)* Étude des *cames ou excentriques à cadre.*

a) Étude des cames ou excentriques a galets.

α) *Les axes des mouvements se rencontrent à angle droit.*

148. Problème général. — *Déterminer le contour d'une came animée d'un mouvement de rotation uniforme de telle façon qu'elle imprime à une tige guidée un mouvement rectiligne alternatif dont la direction rencontre l'axe de rotation de la came sous un angle droit.*

Le mouvement rétrograde de la tige étant en général identique au mouvement direct, nous supposerons qu'ils s'accomplissent l'un et l'autre pendant une demi-révolution de l'arbre moteur.

Digitized by Google

Ceci posé, prenons pour plan de la figure un plan perpendiculaire à l'axe O de rotation de la came et désignons par OA le plus petit rayon de cet organe.

Sa rotation uniforme s'effectuant, par exemple, dans le sens de la flèche *f*, nous pourrons toujours sur un graphique faire correspondre la longueur de l'arc $\widehat{Ab}$ au temps qu'elle met pour tourner d'un angle $\widehat{AOb}$ égal à θ ; moyennant cette condition le développement de la circonférence OA correspondra à la durée d'un tour de l'arbre moteur.

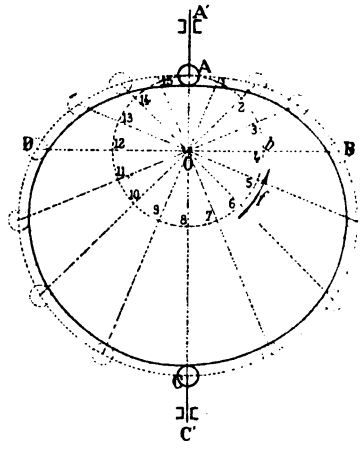


Fig. 193.

Ceci posé, imaginons que l'une des extrémités de la tige à conduire, supposée réduite à un point géométrique, coïncide avec le point A au moment où l'arbre moteur va tourner. Supposons aussi que la courbe des espaces OPQRS de son mouvement soit telle qu'à tout point P de l'arc OQ, relatif au mouvement direct, corresponde un point R de l'arc QS, relatif au mouvement rétrograde, lié au précédent par les relations :

$$Op = qr, \qquad pP = r_1R$$

qui expriment que les mouvements direct et rétrograde sont identiques.

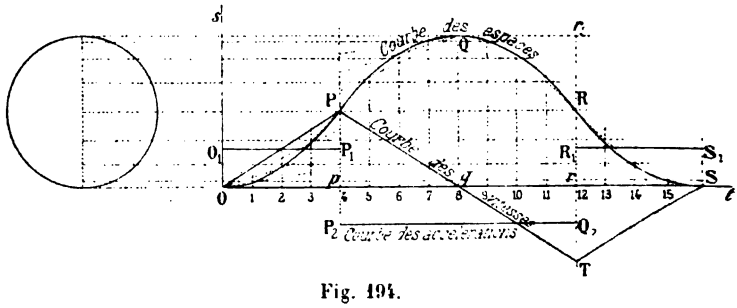


Fig. 194.

Pour obtenir un point quelconque B du contour cherché, il nous suffit alors de prendre l'arc Ab égal à l'abcisse Op du point P, et la longueur bB égale à son ordonnée pP.

En répétant un certain nombre de fois cette construction et joignant

Digitized by Google

par un trait continu tous les points obtenus nous obtiendrons ce contour ABC lui-même. En agissant sur l'extrémité A de la tige, il lui communique son mouvement direct et si nous la supposons sectionnée en deux parties AA′, CC′ invariablement reliée entre elles et entre lesquelles peut tourner la came, après une demi-révolution, elle lui communique son mouvement rétrograde en agissant sur la seconde extrémité C′.

Toutefois, si le sens de la rotation vient à changer brusquement à un moment quelconque, la tige reste immobile. Pour éviter cet inconvénient, nous complétons le contour ABC, en lui adjoignant un arc CDA déterminé par la condition que le contour complet soit en contact à chaque instant avec les deux galets ou ce qui revient au même qu'il ait tous ses diamètres égaux.

Dans le cas où la partie OPQ de courbe des espaces se compose de deux arcs OP, PQ occupant la même disposition, le premier par rapport à l'axe des temps, le second par rapport à la parallèle menée à cet axe par le point Q, les deux arcs ABC et CDA du contour de la came sont symétriques par rapport à la direction du mouvement du rectiligne de la tige et cette dernière possède toujours le même mouvement quel que soit celui qui travaille.

S'il n'est pas possible ou si l'on ne veut pas sectionner la tige, on la dispose alors tout entière d'un même côté de l'arbre et on l'assujettit, pendant sa course directe, à venir buter contre un ressort qui, en se détendant, maintient son extrémité A en contact avec la seconde partie du contour et l'oblige à prendre son mouvement rétrograde. Le contour complet n'a donc pas forcément dans ce cas tous ses diamètres égaux.

En pratique, les points A et C sont les projections, sur le plan de la figure, des axes des galets dont sont munies les extrémités de la tige. En sorte que le contour réel de la came peut être envisagé comme une partie de l'enveloppe d'une circonférence de rayon égal à celui du galet dont le centre parcourt le contour trouvé précédemment.

Dans l'examen des cas particuliers qui vont suivre, nous conserverons les notations employées dans le cas général.

1° Came en cœur relative au cas où les mouvements de l'arbre moteur et de la tige sont uniformes.

149. Recherche du contour théorique. — La courbe OPQRS du mouvement de la tige se compose de deux segments de droite OQ

Digitized by Google

et QS symétriques par rapport à l'ordonnée Qq du point Q dont les coordonnées sont :

$$Oq = \pi OA, \qquad qQ = l.$$

En supposant (fig. 197) que l'arbre O tourne dans le sens de la flèche f,

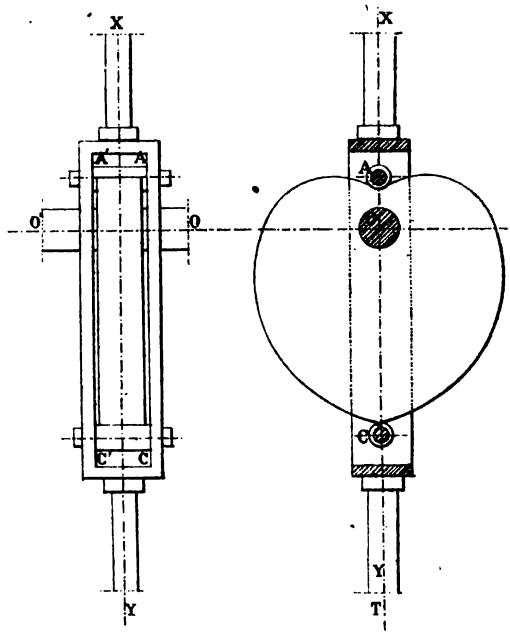


Fig. 195.

les constructions qui permettent d'obtenir l'arc ABC du contour théorique reviennent à partager la demi-circonférence OA située à gauche de la

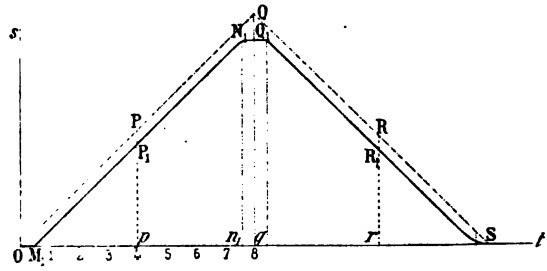


Fig. 196.

direction xy du mouvement rectiligne, en huit parties égales, à porter sur les rayons correspondants, à partir de leurs extrémités, les longueurs $\frac{l}{8}$, $\frac{2l}{8}$, $\frac{3l}{8}$ ....., puis à joindre par un trait continu les points obte-

Digitized by Google

nus. La seconde partie CDA du contour est symétrique de la première par rapport à la direction du mouvement rectiligne et le contour complet se compose de deux arcs de *spirales d'Archimède*.

Pour l'établir, prenons le point O pour pôle, la demi-droite OX pour axe polaire et désignons par ρ_0 la longueur du segment OA, par ω la

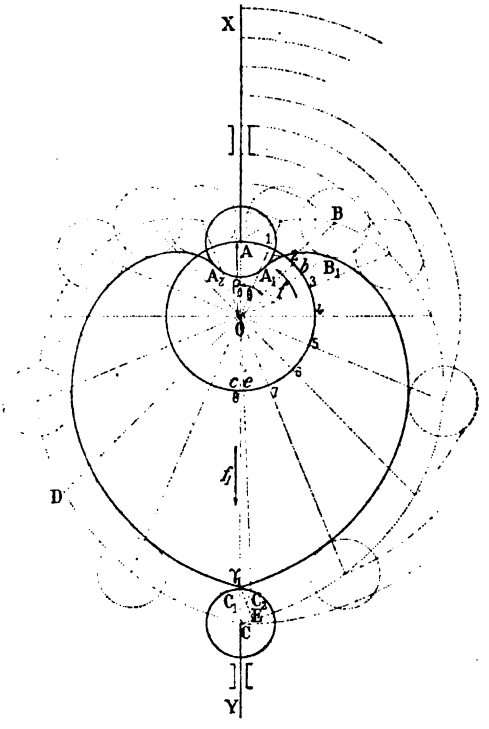


Fig. 197.

vitesse angulaire de l'arbre, par ρ et θ les coordonnées polaires d'un point quelconque B du contour.

Pendant le temps $\frac{\pi}{\omega}$ qui correspond à la durée d'un demi-tour de l'arbre moteur, la tige se déplace d'un mouvement uniforme de la longueur l; sa vitesse V a donc pour expression :

$$V = \frac{l\omega}{\pi}.$$

Ceci posé, observons que la figure même nous conduit à la relation :

$$\rho = \rho_0 + b\mathrm{B}.$$

Mais bB représentant le déplacement de la tige pour une rotation θ

Digitized by Google

de l'arbre ou bien encore pendant un temps t égal à $\frac{\theta}{\omega}$, nous pouvons écrire :

$$bB = V \times t = \frac{l\theta}{\pi}$$

et l'arc ABC ayant pour équation :

$$\rho = \rho_0 + \frac{l\theta}{\pi}$$

correspond bien à un arc de spirale d'Archimède puisque les accroissements $\rho - \rho_0$ des rayons vecteurs de ces différents points sont proportionnels aux angles polaires θ correspondants.

150. Recherche du contour pratique. — Pour l'obtenir nous devons prendre l'une des parties de l'enveloppe d'une circonférence de rayon constant dont le centre parcourt l'arc ABCDA, le compléter entre les points A_1 et A_2 où il présente une discontinuité par un arc de circonférence A_1A_2 et lui supprimer les deux arcs γ_1C_1, γ_1C_2 qui se croisent en γ_1 sur la direction du mouvement rectiligne et qui s'opposeraient au mouvement de la tige. La distance γ_1C des pointes des deux cames est donc supérieure au rayon commun des deux galets.

151. Problème. — *Le mécanisme occupant la position indiquée sur la figure* 197, *par quel point le contour de la came touchera-t-il le galet supérieur après une rotation* θ *inférieure à un demi-tour ?*

Considérons, à cet effet, le point B du contour théorique qui correspond à l'angle $\widehat{AOB} = \theta$. Puisqu'il vient en coïncidence avec le centre du galet supérieur, dont le profil est circulaire, après une rotation θ de l'arbre moteur, le pied B_1 de la normale BB_1 au contour pratique sera le point cherché.

152. Problème. — *Le point de contact de la came avec le galet supérieur s'étant transporté de* A_1 *en* B_1, *trouver la rotation correspondante de l'arbre moteur et évaluer sa durée.*

La normale B_1B au contour pratique issue du point connu B_1 venant couper au point B le contour théorique, l'angle $\widehat{AOB}$ mesure la rotation cherchée, et à sa durée nous pouvons faire correspondre l'arc Ab de circonférence OA, si nous convenons de prendre pour représenter celle d'un tour complet de l'arbre moteur O le développement de cette même circonférence.

153. Étude du mouvement de la tige. — De la pointe γ_1 de la came, menons la normale au contour $A_1B_1\gamma_1$ et désignons par E (fig. 197).

Digitized by Google

le point où elle vient couper le contour théorique. L'arbre O tournant dans le sens de la flèche *f*, la came vient en contact avec le galet supérieur par sa pointe γ_1 après une rotation correspondante à langle $\widehat{AOE}$ ou bien encore après un intervalle de temps mesuré par l'arc $\widehat{Ae}$ de circonférence OA, § 152. Pendant ce même temps, le mouvement de la tige dont un point A semble se déplacer sous l'influence du contour théorique est uniforme et correspond à la vitesse $\frac{l\omega}{\pi}$.

Après quoi la came occupant la position indiquée par la figure 198,

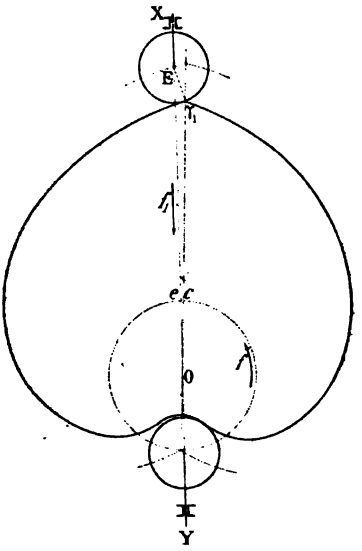


Fig. 198.

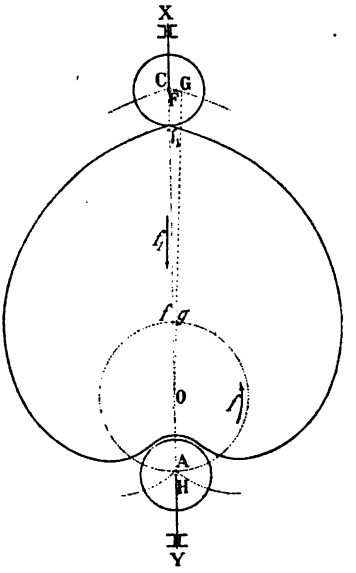


Fig. 199.

sa pointe γ_1 pousse le galet supérieur jusqu'au moment où elle vient se placer sur la direction du mouvement rectiligne. Comme d'ailleurs elle n'est soumise à aucune loi géométrique le mouvement correspondant de la tige est varié et cela pendant un temps mesuré par l'arc $\widehat{ce}$.

A la fin de cette période, la disposition de la came est celle indiquée par la figure 199.

Le centre du galet supérieur se trouvant en un point F situé entre les pointes C et γ_1, celui du galet inférieur occupe une position H non située sur le contour de la came théorique, puisque AH = CF. Il en résulte alors que la came ne touche pas le galet inférieur et qu'il y a immobilité de la tige jusqu'au moment où la rotation de l'arbre moteur amène le point G du contour théorique en coïncidence avec le point F, c'est-à-dire pendant une durée mesurée par l'arc $\widehat{fg}$ de circonférence OA.

Digitized by Google

154. Courbe des espaces du mouvement de la tige. — Sur la direction du mouvement rectiligne, prenons pour sens positif celui de la flèche f_1 et cherchons à représenter la courbe des espaces du mouvement de la tige en prenant pour origine du temps le moment où la came occupe la disposition indiquée par la figure 199. Elle correspond alors à la ligne brisée OPQRS ou à la courbe $OM_1P_1N_1Q_1R_1S$ suivant que le mouvement est communiqué à la tige par la came théorique ou par la came pratique. Cette dernière se compose alors : 1° d'un segment

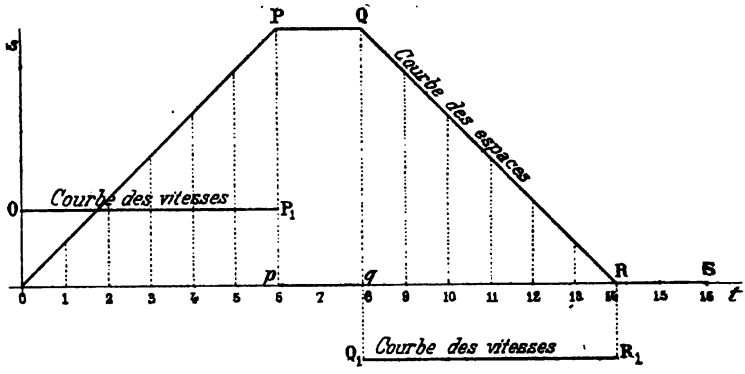


Fig. 200.

de droite OM_1 situé sur l'axe des temps et d'une longueur égale à celle de l'arc $\widehat{fg}$; 2° d'un second segment M_1N_1 de droite parallèle à OQ et limité au point N_1 d'abcisse On_1 égale à $\pi OA - \widehat{ec}$; 3° d'un arc de courbe N_1Q_1 limité au point Q_1 d'ordonnée $l - CF$; 4° enfin d'une partie Q_1R_1S occupant par rapport à la parallèle à l'axe des temps menée par le point Q_1, la même disposition que la précédente par rapport à cet axe lui-même.

155. Inconvénients. — La came en cœur présente les inconvénients suivants :

a) Son contour constamment en contact avec les galets produit à chaque tour de l'arbre moteur un frottement considérable.

b) Agissant sur les galets dans une direction oblique à la tige, elle presse fortement cette dernière contre ses guides et occasionne, par ce fait, une nouvelle perte de travail.

c) Enfin comme le mouvement de la tige est à la fois alternatif et uniforme, à la fin de chaque course sa vitesse passe brusquement d'une valeur positive à une valeur négative, phénomène qui se traduit par un choc considérable.

Digitized by Google

2° Came a mouvement uniforme intermittent.

156. Le contour de la came à mouvement uniforme intermittent se déduit de la courbe des espaces OPQRS (fig. 200) du mouvement de la tige par des considérations analogues aux précédentes. L'arc B_1C_1 du

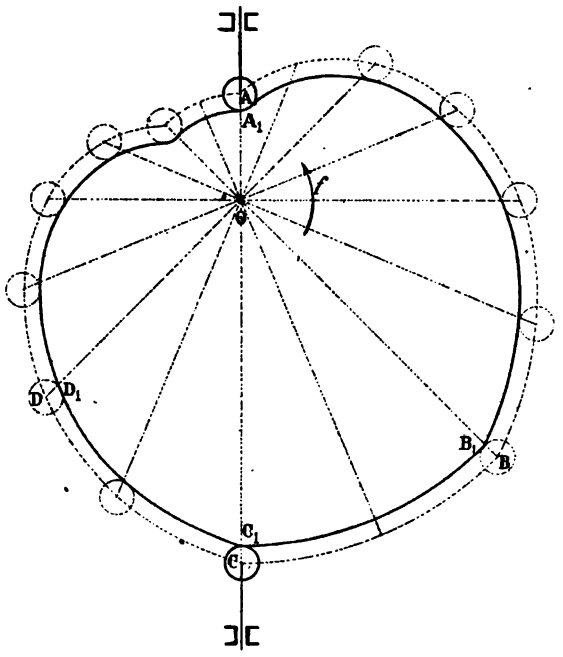


Fig. 201.

contour obtenu qui correspond à la phase de repos de la tige est un arc de circonférence.

3° Came Morin relative au cas ou les mouvements de l'arbre moteur et de la tige sont respectivement uniformes et uniformément variés.

157. Recherche du contour. — En imposant à la tige, pendant un demi-tour de l'arbre moteur, un mouvement varié accéléré, puis ensuite varié retardé avec vitesse nulle au commencement et à la fin de sa course, Morin est arrivé à la suppression partielle des chocs dont nous venons de parler. Toutefois comme il y avait une infinité de contours répondant à ces conditions, il fit choix de celui qui correspondait au mouvement uniformément varié et pour lequel la courbe des espaces OPQRS du mouvement de la tige se composait (fig. 194) :

Digitized by Google

1° D'un premier arc OP de parabole définie par son sommet O, son axe Os et un point P de coordonnées :

$$Op = \frac{\pi OA}{2}, \quad pP = \frac{l}{2};$$

2° D'un second arc PQ de parabole définie elle aussi par son axe Qq, son sommet Q de coordonnées :

$$Oq = \pi OA, \quad qQ = l$$

et le même point P que précédemment.

3° D'un arc QRS symétrique de celui que nous venons de définir par rapport à l'ordonnée Qq.

Le contour de la came obtenu par les considérations développées § 151, correspond à la figure 193 et est symétrique par rapport à la direction du mouvement rectiligne de la tige.

158. Courbes des vitesses et des accélérations du mouvement de la tige. — Pour obtenir ces courbes, recherchons tout d'abord l'équation de la parabole OP. Elle est de la forme :

$$s = at^2$$

et comme elle doit être vérifiée pour les coordonnées $\frac{\pi}{2\omega}$, $\frac{l}{2}$ du point P, ce qui donne pour a la valeur $\frac{2l\omega^2}{\pi^2}$, elle peut s'écrire :

$$s = \frac{2l\omega^2}{\pi^2} t^2$$

et conduit aux équations suivantes :

$$v = \frac{4l\omega^2}{\pi^2} t$$

$$j = \frac{4l\omega^2}{\pi^2}$$

qui donnent les expressions des vitesses et des accélérations du mouvement de la tige pour le premier quart de tour de l'arbre moteur.

a) *Courbe des vitesses.* — La courbe des vitesses se compose :

1° D'un segment OP de droite qui passe par l'origine O des coordonnées et par le point P de coordonnées :

$$t = \frac{\pi}{2\omega}, \quad v = \frac{2l\omega}{\pi},$$

que nous pouvons confondre avec le point P en faisant choix de l'échelle qui, à la longueur $\frac{2l\omega}{\pi}$, fait correspondre sur le graphique la longueur $\frac{l}{2}$.

2° D'un second segment de droite Pq symétrique du premier par rapport à l'ordonnée pP.

Digitized by Google

3° Enfin de la ligne brisée qTS symétrique de la précédente OPq par rapport au point q.

b) *Courbe des accélérations.* — A l'accélération de valeur absolue $\frac{4l\omega^2}{\pi^2}$, nous pouvons faire correspondre à une échelle convenable :

1° Deux segments O_1P_1, R_1S_1 parallèles à l'axe des temps, d'ordonnée $\frac{l}{4}$ et symétriques par rapport à l'ordonnée qQ.

2° Un segment P_2Q_2 parallèle aux précédents et d'ordonnée $-\frac{l}{4}$.

4° CAME IMPRIMANT A LA TIGE UN MOUVEMENT VARIÉ A ACCÉLÉRATION CONTINUE.

159. Recherche du contour. — L'accélération du mouvement

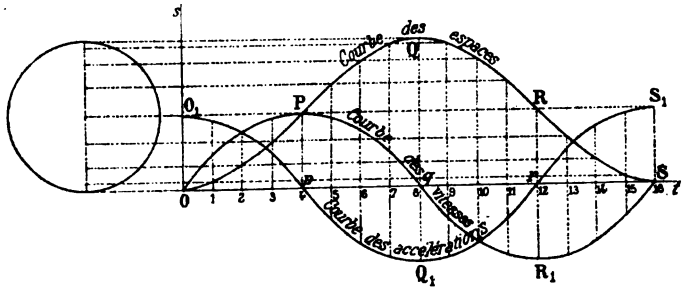


Fig. 202.

communiqué par une came Morin à une tige guidée étant discontinue,

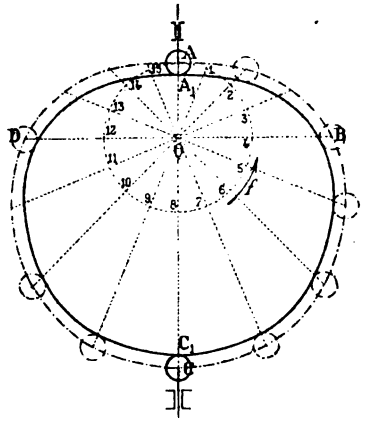


Fig. 203.

dans le fonctionnement du mécanisme la suppression des chocs n'est que partielle et non totale comme on aurait pu tout d'abord le croire.

Digitized by Google

Elle est toutefois totale dans le cas où l'on imprime à la tige un mouvement varié correspondant, par exemple, au mouvement circulaire uniforme de diamètre l projeté sur un diamètre: ce dernier répond, en effet, à toutes les conditions précédentes et à une accélération continue.

Le contour qui s'en déduit fig. (203) diffère peu de celui obtenu précédemment.

5° Came pour machines a vapeur ou pour moteurs Charon.

160. Dans la plupart des moteurs modernes, le tiroir n'existant plus, l'admission et l'échappement du gaz se font par des orifices

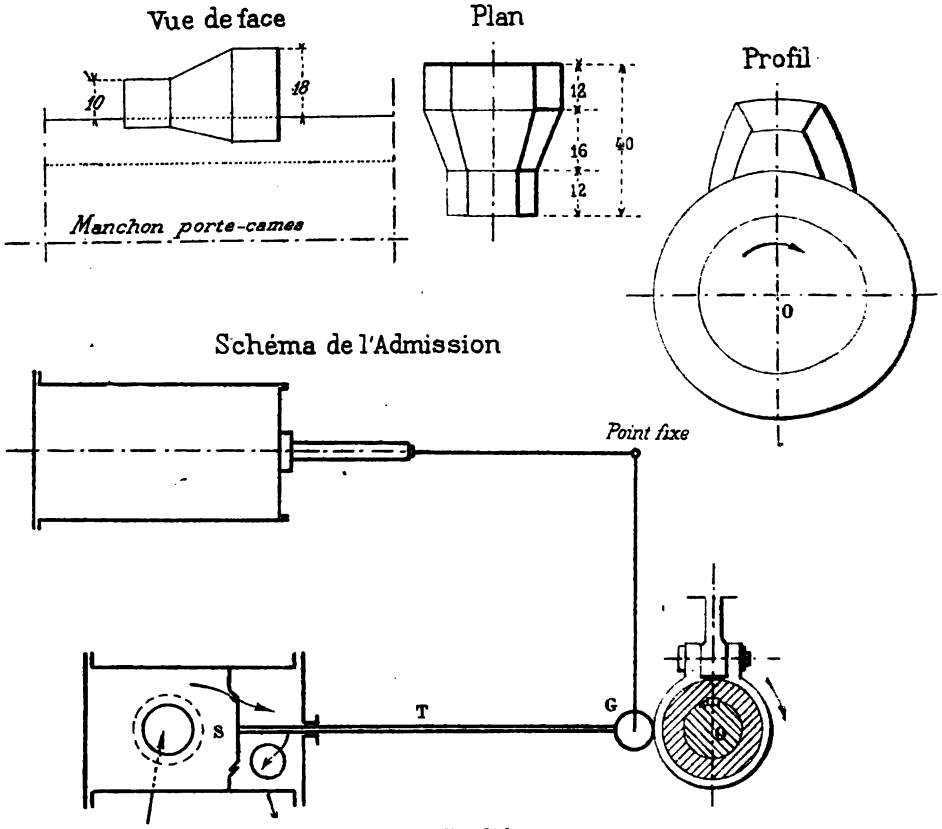


Fig. 204.

distincts. Comme l'indique la figure 204, l'admission se fait par suite de l'ouverture d'une soupape S solidaire d'une tige T terminée par un galet G lequel, par l'intermédiaire d'un ressort, appuie constamment

Digitized by Google

sur le contour d'une came C montée sur un arbre O qui fait un tour en même temps que la manivelle.

Si nous désignons par T la durée de cette révolution, nous pouvons imposer à la soupape :

1° Qu'elle se soulève de son siège pendant un temps $\frac{2T}{20}$ d'un mou-

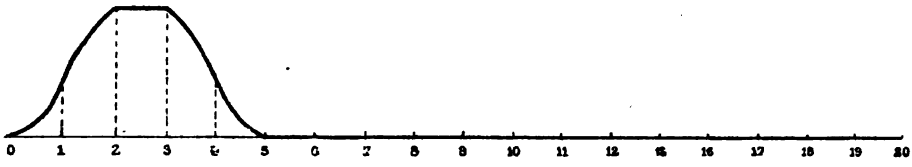


Fig. 205.

vement varié accéléré tout d'abord, puis varié retardé ensuite et parcourt ainsi la longueur l ;

2° Qu'elle reste ouverte pendant un temps $\frac{T}{20}$;

3° Qu'elle revienne ensuite à sa position première au bout d'un nouvel intervalle de temps $\frac{2T}{20}$ par un mouvement varié accéléré suivi d'un mouvement varié retardé ;

4° Qu'elle reste immobile jusqu'à la fin de la révolution de l'arbre O. Nous sommes alors conduits à représenter sur la figure 205 la courbe des espaces de son mouvement et sur la figure 206 le contour de la came qui lui correspond.

Dans les moteurs Charon, cette came affecte la forme tronconique et se trouve de plus invariablement reliée au régulateur. Si la machine marche trop vite, le régulateur s'élève et avec lui la came dont la section par le plan de la figure est calculée de façon qu'elle communique à la soupape un déplacement d'autant plus faible qu'elle est plus élevée.

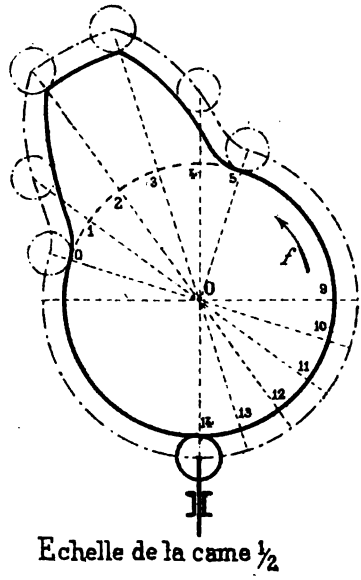


Fig. 206.

Avec ce dispositif, l'admission du gaz est plus ou moins grande suivant que la vitesse de la machine est inférieure ou supérieure à sa vitesse normale.

Digitized by Google

6° Came communiquant a la tige des mouvements direct et rétrograde différents.

161. Dans le cas où la came doit communiquer à la tige des mou-

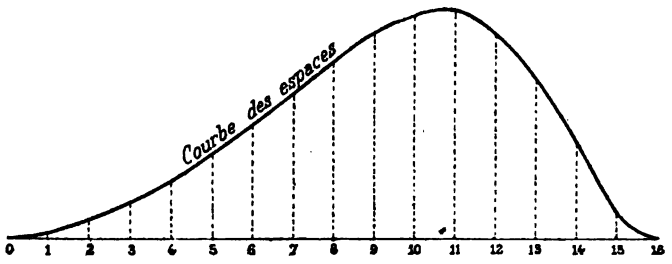


Fig. 207.

vements direct et rétrograde différents, la tige se trouve disposée tout entière d'un même côté de l'arbre et si on lui assigne un mouvement

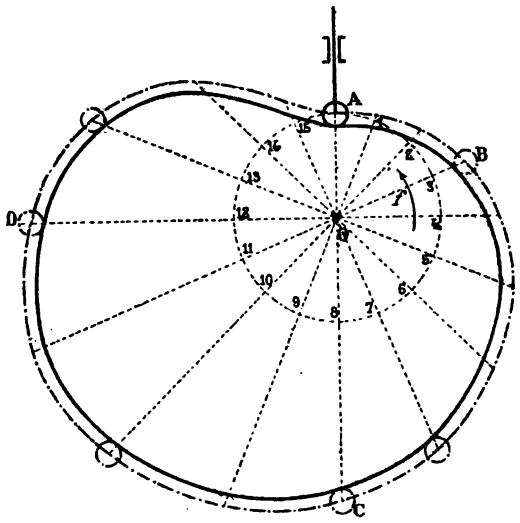


Fig. 208.

auquel correspond la courbe des espaces indiquée par la figure 207, le contour de la came destiné à lui communiquer sera celui de la figure 208.

7° Came communiquant a la tige deux courses complètes pendant une révolution de l'arbre moteur.

162. La courbe des espaces OPQRS du mouvement de la tige repré-

Digitized by Google

sentée par 209 la figure correspond à une demi-révolution de l'arbre moteur. La tige s'élève donc pendant le premier quart de révolution et

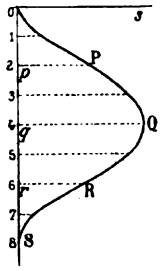


Fig. 209.

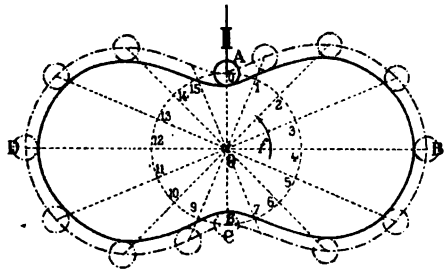


Fig. 210.

vient buter contre un ressort qui en se détendant la ramène à sa position première après une demi-révolution.

β) *Les axes des mouvements se coupent sous un angle quelconque.*

163. Recherche de la surface de la came. — Le problème général de la transformation de mouvement restant le même, nous désignerons par OX l'arbre moteur, par OY l'axe du mouvement de translation de la tige, par OXY le plan de la figure, par A l'extrémité de la tige supposée pour l'instant réduite à un simple point géométrique et nous supposerons que cette tige vient buter contre un ressort pendant qu'elle effectue sa course directe et qu'elle prend son mouvement rétrograde sous l'influence de la détente de ce dernier.

Pour obtenir le contour de la came à caler sur l'arbre OX et qui imprime à la tige un mouvement connu à l'avance, considérons le cône engendré par le segment de droite OA tournant autour de l'axe OX. Si au lieu de le limiter à la circonférence décrite par le point A nous prolongions ses différentes génératrices jusqu'à leur rencontre avec une courbe (C), il nous suffirait de faire tourner l'arbre OX d'un angle AIB, par exemple, pour que le point A et par suite la tige s'élèvent de la longueur BM. Il en résulte que la courbe (C) n'est pas arbitraire et qu'elle est liée au mouvement connu de la tige.

Pour la déterminer, développons le cône primitif OA de la came sur l'un de ses plans tangents, celui, par exemple, qui contient la génératrice OA et convenons que la longueur de l'arc de circonférence qui limite le secteur obtenu correspond sur un graphique au temps d'une révolution complète de l'arbre moteur. Puis, construisons la courbe des espaces OPQ.... du mouvement de la tige et reportons ensuite ses

Digitized by Google

différentes ordonnées sur les rayons correspondants du secteur obtenu précédemment, à partir de leurs extrémités. La courbe M_1N_1 que nous

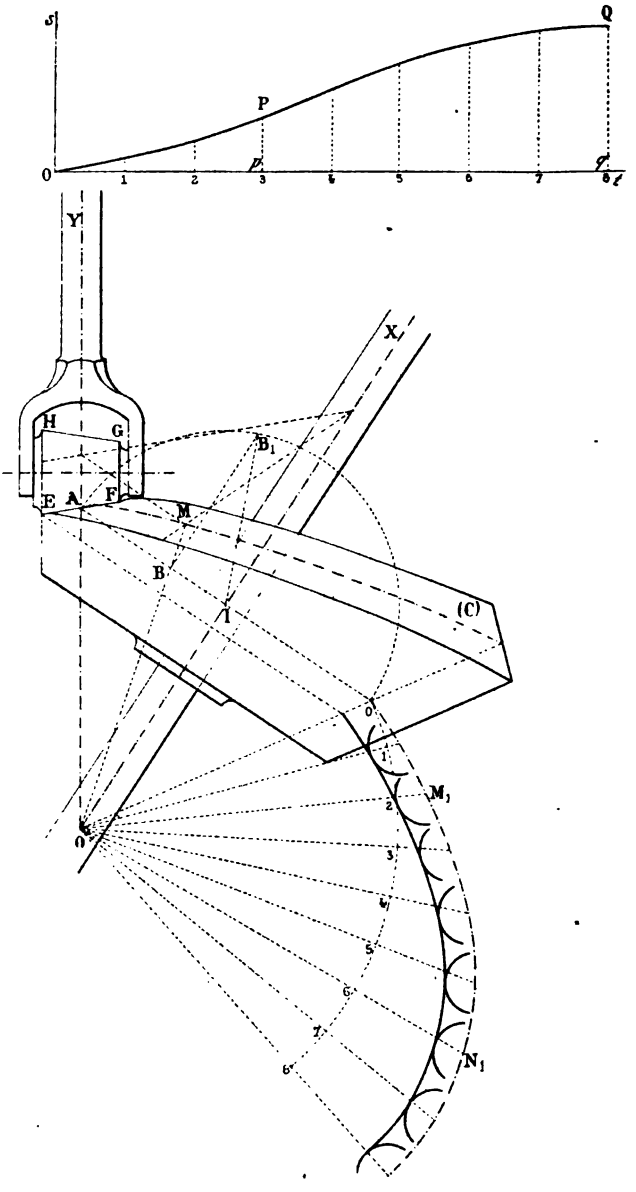


Fig. 211.

obtenons en joignant par un trait continu les différents points que nous venons de déterminer n'est autre que la transformée de la courbe (C).

Digitized by Google

Elle permet de construire cette courbe elle-même en appliquant les principes exposés en géométrie descriptive dans la théorie des développements.

Pratiquement, la tige se termine par un galet tronconique dont la section par le plan de la figure est un trapèze EFGH dont l'un des côtés EF passe par le point A. En le déplaçant de telle façon que la droite EF s'appuie constamment par le point A sur la courbe (C) et rencontre l'axe OX sous un angle constant et en prenant la partie de surface qui l'enveloppe en le laissant à son extérieur, nous obtiendrons la surface de la came qui imprime à la tige le mouvement que nous lui avions assigné à l'avance.

164. Remarque. — Pour réduire autant que possible le frottement de glissement, nous avons donné au galet une forme tronconique, la forme cylindrique convenant seulement au cas où il doit se trouver en contact avec une surface parfaitement plane sur laquelle il peut rouler.

γ) *Les axes des mouvements ne se rencontrent pas mais sont rectangulaires.*

165. Cette transformation de mouvement se rencontre dans certaines machines soufflantes qui, réduites à leur plus simple expression, se composent de deux cylindres C et C′ munis de soupapes R et R′ s'ouvrant comme l'indique la figure 212 de manière à permettre à l'air atmosphérique de s'introduire dans chacun d'eux pendant la descente du piston. Ils communiquent tous deux avec une tuyère T par une chapelle H ouverte ou fermée par les soupapes S et S′. L'un des pistons monte tandis que l'autre descend et la durée de l'ascension du premier est légèrement supérieure à celle de la descente du second de manière à obtenir un jet d'air continu. Pour déterminer la forme des excentriques à galets qui permettent de leur communiquer les mouvements qu'on leur assigne à l'avance, nous distinguons deux cas :

α) *Les mouvements de l'arbre moteur* O *et de la tige sont uniformes.* — Nous prenons pour plan de la figure celui qui contient l'axe AX de l'un des pistons et qui est perpendiculaire à l'arbre O et nous admettons tout d'abord que l'une des extrémités de la tige se réduit à un point géométrique A, que sa course directe l s'effectue pendant les $\frac{6}{10}$ du temps mis par l'arbre moteur pour faire un tour et que sa course rétrograde s'accomplit pendant les $\frac{4}{10}$ restants.

Ceci posé, du point O comme centre avec OA pour rayon, décrivons

Digitized by Google

une circonférence et divisons-la en dix parties égales; puis par les points de division obtenus A_1, A_2, A_3, ..., menons-lui des tangentes et portons respectivement sur chacune d'elles à partir de leurs points de contact les longueurs $\frac{l}{6}$, $\frac{2l}{6}$, $\frac{3l}{6}$, ... La courbe que nous obtenons en joignant par un trait continu tous les points obtenus

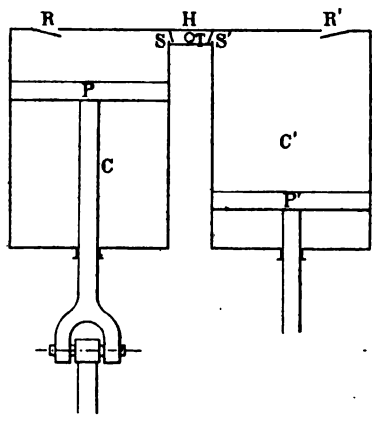


Fig. 212.

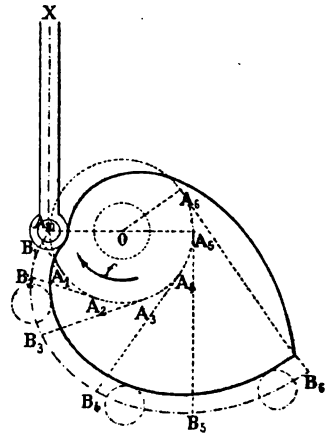


Fig. 213.

B_1, B_2, B_3, ..., correspond à la partie du contour théorique qui permet de communiquer à la tige sa course directe; celle qui la guide dans sa course rétrograde s'obtient par des considérations analogues.

Du contour théorique, nous déduisons le contour pratique par des considérations identiques à celles déjà exposées maintes fois ; elles nous conduisent aux constructions indiquées sur la figure 213.

Si nous choisissons l'arbre O de façon que le rayon OA satisfasse à la relation :

$$\frac{6}{10} \times 2\pi OA = l$$

de laquelle nous déduisons :

$$OA = \frac{5l}{6\pi}$$

la partie AB_1 ..... B_6 du contour pratique n'est autre qu'une développante de cercle qui vient presser la tige normalement.

β) *Le mouvement de l'arbre* O *seul est uniforme.* — Nous traçons la courbe des espaces du mouvement de la tige, nous portons ensuite les longueurs de ses différentes ordonnées sur les tangentes dont nous venons de parler à partir de leurs différents points de contact et nous achevons comme précédemment le tracé du contour de la came.

Digitized by Google

b) ÉTUDE DES EXCENTRIQUES A CADRE.

166. Nature du contour d'un excentrique à cadre. — La transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif, dans le cas où les axes sont rectangulaires, peut encore s'obtenir par l'intermédiaire d'une surface cylindrique calée sur l'arbre O de rotation et se mouvant à l'intérieur d'un cadre ABCD, invariablement lié à la tige soumise au mouvement rectiligne, et dont la hauteur est calculée de façon que ses deux côtés parallèles AB et CD lui soient constamment tangents.

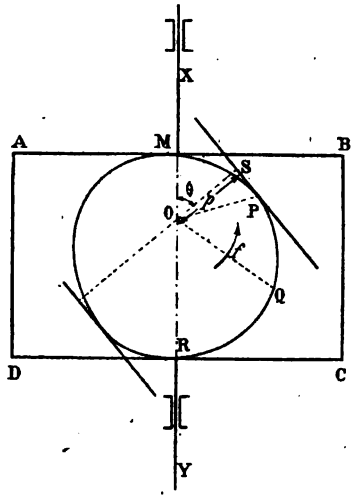


Fig. 214.

La section droite obtenue dans cette surface en la coupant par le plan de la figure doit donc jouir des propriétés suivantes :

1° Ses rayons OM, OP, OQ, OR, dont les extrêmes font entre eux un angle de 180°, doivent aller en croissant ;

2° Elle doit admettre une infinité de couples de tangentes parallèles distantes l'une de l'autre de la hauteur du cadre.

Si donc nous prenons le point O pour pôle, l'axe OX du mouvement rectiligne pour axe polaire et si nous désignons par p la distance OS du point O à celle des tangentes au contour cherché qui correspond à l'angle $\widehat{XOS} = \theta$, l'équation de la directrice de l'excentrique pourra s'écrire :

$$p = f(\theta),$$

à la condition que la fonction $f(\theta)$ soit croissante lorsque θ varie de 0 à 180° et qu'elle satisfasse de plus à la relation :

$$f(\theta) + f(\theta + \pi) = AD$$

quel que soit l'angle θ.

Dans l'exposition qui va suivre, nous nous occuperons seulement de la théorie des excentriques à contours circulaires ; leur théorie repose sur le théorème général suivant :

167. Théorème. — *Lorsqu'un excentrique circulaire tourne autour d'un axe parallèle à ses génératrices et qui ne coïncide avec son axe de figure et agit sur le côté* AB *d'un cadre* ABCD *jouissant des pro-*

Digitized by Google

priétés précédentes, il communique à la tige un déplacement égal à la projection sur la direction du mouvement rectiligne du chemin correspondant parcouru par le centre du contour.

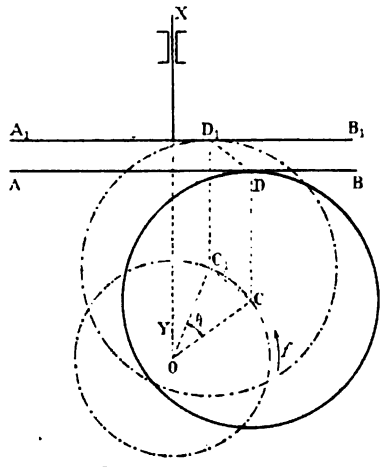


Fig. 215.

Soient, en effet (fig. 215) O le pied de l'axe de rotation de l'excentrique sur le plan de la figure, C la position occupée par son centre au début du mouvement et AB celle du côté du cadre sur lequel il exerce son action.

Au bout du temps t, l'arbre ayant tourné, par exemple, d'un angle θ dans le sens de la flèche f, le centre C s'est transporté au point C_1 satisfaisant à la condition :

$$\widehat{COC_1} = \theta.$$

et le côté AB du cadre, constamment perpendiculaire à la direction XY du mouvement rectiligne, est venu occuper la position A_1B_1 distante du centre C_1 d'une longueur C_1D_1 égale au rayon de l'excentrique.

Les deux segments CD et C_1D_1 sont donc égaux et de plus comme ils sont parallèles la figure CDC_1D_1 est un parallélogramme. Nous pouvons donc écrire relativement à des projections faites sur la direction XY du mouvement rectiligne :

$$\text{Proj. } (DD_1) \quad \text{Proj. } (CC_1)$$

ou bien encore :

Chemin parcouru par la tige = Proj. du chemin parcouru par le centre de l'excentrique.

1° Excentrique triangulaire.

168. Recherche du contour de l'excentrique. — Désignons par

Digitized by Google

O le pied de l'axe de rotation sur le plan de la figure, par XY la direction du mouvement rectiligne de la tige et par l la course à produire.

Ceci posé (fig. 216), du point O comme centre avec l pour rayon, décrivons un arc M_1N_1 de circonférence et désignons par M_1 le point où il vient couper l'axe XY ; puis de ce point comme centre, avec le même rayon, décrivons un second arc ON_1 et prenons son point de rencontre N_1 avec le précédent. Ce sera le centre d'un troisième arc OM_1 *de circonférence,* de même rayon que les précédents, qui complétera le contour triangulaire OM_1N_1 de l'excentrique assujetti à se mouvoir à l'intérieur du cadre $A_1B_1C_1D_1$.

169. Étude du mouvement de la tige. — Le mouvement uniforme de l'arbre s'effectuant, par exemple, dans le sens de la flèche f, prenons sur la direction XY du mouvement rectiligne le sens f comme sens positif.

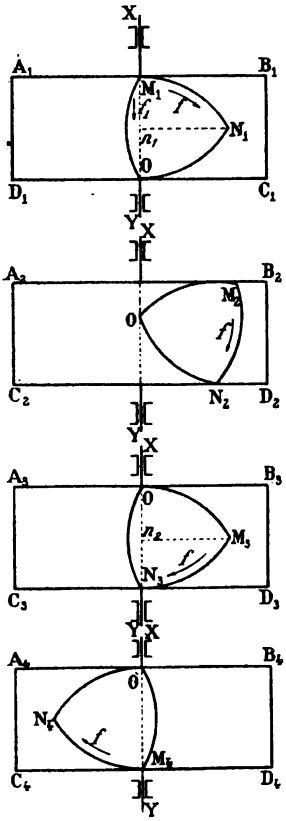


Fig. 216.

Première phase. — Au début du mouvement, l'excentrique occupant la position OM_1N_1 indiquée par la première figure 216, le côté ON_1 travaille jusqu'à ce que son extrémité N_1 entre en prise avec le côté C_1D_1 du cadre. A ce moment, le rayon M_1N_1, qui passe par son point de contact vient en coïncidence avec le second côté M_2N_2 de l'hexagone régulier qui a M_1N_1 pour premier côté et qui est inscrit dans la circonférence OM_1.

Pendant cette première phase, le centre M_1 du contour qui travaille a donc parcouru d'un mouvement uniforme l'arc M_1N_1 et la tige s'est déplacée de la longueur $M_1n_1 = \frac{l}{2}$ *d'un mouvement varié accéléré* identique au mouvement circulaire uniforme du point M_1 projeté sur le diamètre XY.

Deuxième phase. — Au début de la deuxième phase, l'excentrique occupe la position indiquée sur la deuxième figure 216 et le sommet N_2 travaille jusqu'au moment où il vient occuper la position N_3 pour laquelle le côté M_2N_2 devient tangent au côté C_2D_2

Digitized by Google

du cadre. Comme nous pouvons toujours le regarder comme une circonférence de rayon nul, la tige, pendant cette deuxième phase, a un mouvement identique au mouvement circulaire uniforme du point N_2 projeté sur la direction XY ; *il est donc varié retardé et correspond à une course* $n_2N_3 = \frac{l}{2}$.

Troisième phase. — Au début de la troisième phase, l'excentrique occupe la position indiquée sur la troisième figure 216 ; il laisse donc le cadre immobile puisque le côté M_3N_3 a tous ses rayons égaux et cela jusqu'au moment où le mécanisme vient occuper la position indiquée sur la quatrième figure 216 pour laquelle le côté ON_4 se trouve en contact avec le côté supérieur A_4B_4 du cadre. Sa disposition par rapport à ce côté étant identique à celle qu'il occupait au début par rapport au côté C_1D_1, au mouvement rétrograde de la tige correspondent trois phases analogues aux précédentes. La durée de chacune correspond au temps mis par l'arbre O pour effectuer un sixième de tour.

170. Courbes des espaces, des vitesses et des accélérations du mouvement de la tige. — Ces courbes indiquées sur la figure

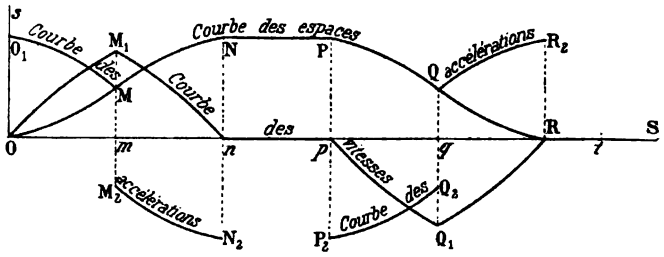


Fig. 217.

217 s'obtiennent en appliquant les principes exposés en cinématique théorique.

Celle des vitesses présente des points anguleux par suite de la discontinuité du mouvement uniforme projeté sur le diamètre XY.

171. Inconvénients. — Cet excentrique présente deux graves inconvénients :

1° Ne pouvant se caler sur l'arbre, il doit être rendu solidaire d'un plateau que l'on dispose en porte à faux sur l'axe de rotation.

2° Ses sommets M et N qui frottent sur les bords AB et CD du cadre s'usent rapidement.

On peut d'ailleurs y remédier en le modifiant comme nous allons l'exposer.

Digitized by Google

2° Excentrique triangulaire pouvant se caler sur l'arbre

172. Recherche du contour. — Autour de l'arbre moteur O, nous

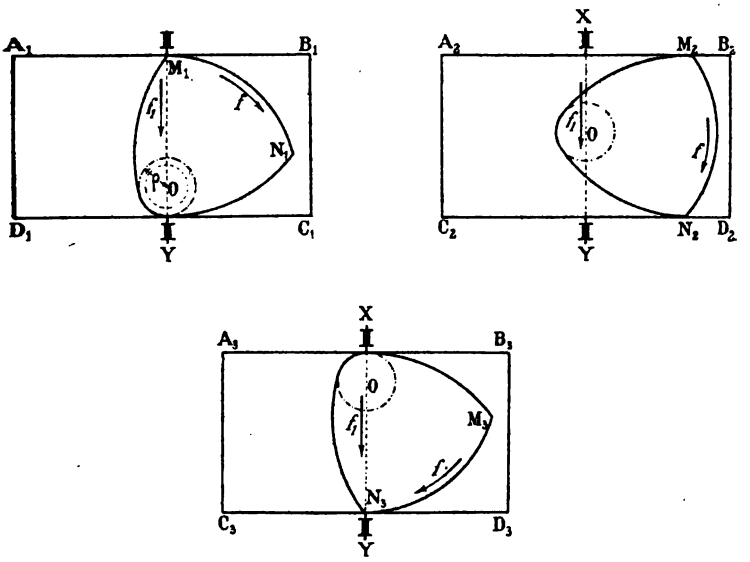


Fig. 218.

ménageons à l'excentrique une certaine épaisseur de métal de façon que son plus petit rayon ρ soit légèrement supérieur à celui de l'arbre moteur et nous composons son contour avec des arcs de cercle de centres respectifs M_1, N_1, O et de rayons $l+2\rho$, $l+2\rho$ et $l+\rho$.

173. Étude du mouvement de la tige. — La corde M_1N_1 ayant

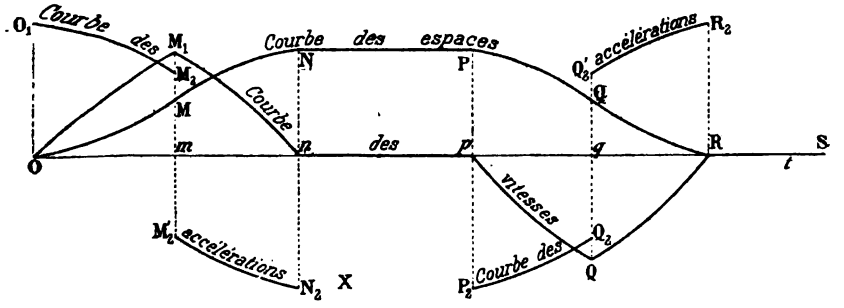


Fig. 219.

une longueur $l+2\rho$ supérieure à $l+\rho$, l'angle M_1ON_1 vaut plus de 60° ;

Digitized by Google

la durée de l'immobilité de la tige est donc supérieure à celle qui correspond à un sixième de tour de l'arbre moteur. A part cette particularité les différentes phases du mouvement de la tige sont analogues aux précédentes et les trois figures 218 correspondent aux positions occupées par l'excentrique au début de chacune d'elles.

174. Courbes des espaces, des vitesses et des accélérations de son mouvement. — Ces courbes sont représentées sur la figure 219.

3° Excentrique Trézel.

175. Recherche du contour. — L'excentrique précédent auquel nous allons arrondir les angles constitue l'excentrique Trézel.

Les données qui conduisent à la détermination de son contour sont les suivantes :

a) Le plus petit rayon ρ de la came ;

b) La course l de la tige ;

c) L'angle M_1ON_1 formé par les droites qui joignent le pied de l'axe de

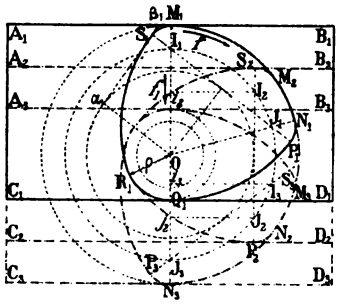


Fig. 220.

rotation aux centres des arcs de raccordement que nous cherchons ; il correspond à la période de repos de la tige.

Cet angle interceptant sur la circonférence OM_1 de rayon $\rho + l$ un arc M_1N_1, les centres des arcs de raccordement se trouvent sur les rayons OM_1 et ON_1 en des points I_1 et J_1, par exemple. Pour les déterminer, remarquons que le contour $M_1N_1P_1Q_1R_1S_1$ composé de six arcs de cercle devant jouir de la propriété générale des contours d'excentriques à cadre, les arcs M_1S_1, P_1Q_1 qui se correspondent doivent avoir même centre I_1 ; pour la même raison, le point J_1 est le centre commun des arcs N_1P_1, R_1S_1. Il s'ensuit que la droite S_1P_1 qui joint ces deux points

Digitized by Google

et qui est limitée au contour de l'excentrique, a une longueur égale à $l + 2\rho$; sa moitié S_1T_1 vaut donc $\frac{l}{2} + \rho$.

La parallèle $\alpha_1\beta_1$ à la bissectrice de l'angle M_1ON_1 menée à la distance $\frac{l}{2} + \rho$ de cette dernière fournit alors une seconde tangente à l'arc M_1S_1 de raccordement. Elle le touche donc au point S_1 satisfaisant à la relation :

$$\beta_1S_1 = \beta_1M_1,$$

et la droite P_1S_1, perpendiculaire au point S_1 à la tangente que nous venons de déterminer vient couper les rayons OM_1 et ON_1 aux points I_1 et J_1 cherchés.

176. Étude du mouvement de la tige. — *Première phase.* —

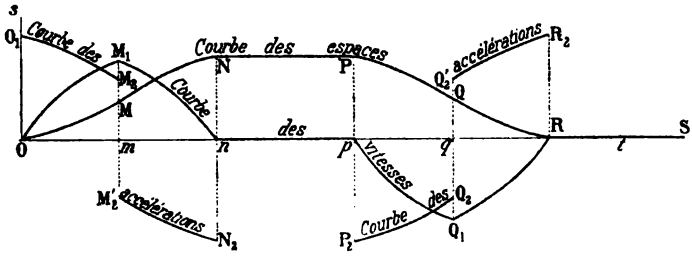


Fig. 221.

L'arbre O tournant dans le sens de la flèche f et l'excentrique occupant au début du mouvement la position M_1N_1..., son côté P_1Q_1 travaille pendant un temps égal à celui que met son centre I_1 pour parcourir l'arc $\widehat{I_1I_2}$. Le cadre descend donc de la longueur I_1i_2 *d'un mouvement direct, varié, accéléré.*

Deuxième phase. — Au début de la deuxième phase, l'excentrique occupant la position M_2N_2..., son côté P_2N_2 travaille pendant un temps égal à celui que met son centre J_2 pour parcourir l'arc J_2J_3. Le cadre descend donc de la longueur j_2J_3 égale à I_1i_2, mais cette fois *d'un mouvement direct, varié, retardé.*

Troisième phase. — Pendant la troisième phase la tige reste *immobile.*

Après quoi elle remonte et son mouvement rétrograde comprend lui aussi trois phases identiques aux précédentes.

177. Courbes des espaces, des vitesses et des accélérations du mouvement de la tige. — Ces courbes représentées sur la

Digitized by Google

figure 221, ont été construites, comme dans les exemples précédents, en faisant correspondre à la durée d'une révolution de l'arbre moteur, le développement de la circonférence OI_1.

4° Excentrique circulaire.

178. Recherche du contour. — Désignons par O le pied de l'axe de rotation sur le plan de la figure, par l la course à produire, par XY

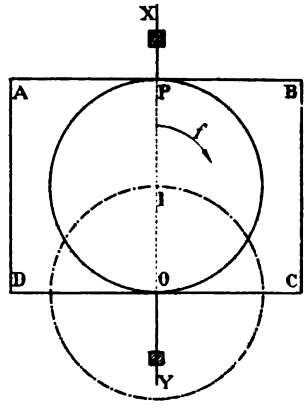


Fig. 222.

la direction du mouvement rectiligne de la tige à conduire et indiquons par la flèche f le sens de rotation de l'excentrique.

Ceci posé, sur la droite XY, à partir du point O, portons une longueur OP égale à l; la circonférence décrite sur ce segment comme diamètre correspond au contour de l'excentrique circulaire.

179. Étude du mouvement de la tige. — Par suite du déplacement de l'excentrique, son centre I, parcourant la circonférence OI d'un mouvement uniforme, le mouvement de la tige est identique au mouvement circulaire uniforme projeté sur la direction XY, mouvement dont l'étude a été faite en cinématique théorique.

180. Modification apportée au contour. — L'excentrique que nous venons d'étudier doit être disposé en saillie sur un plateau placé en porte à faux sur l'arbre moteur. Pour remédier à cet inconvénient, nous lui ménageons un œil dont le rayon $O\beta$ est légèrement supérieur à celui $O\alpha$ de l'arbre et nous portons ensuite de β en P, sur la direction XY, la course l à produire. La circonférence décrite sur le segment

Digitized by Google

γP comme diamètre correspond au contour d'un excentrique circulaire

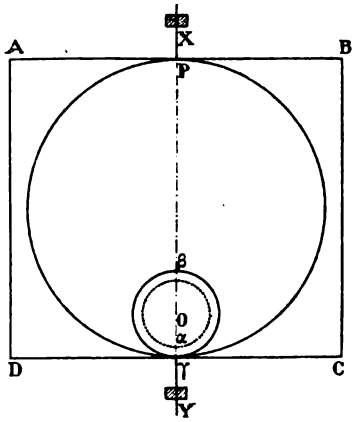


Fig. 223.

que nous pouvons caler sur l'arbre moteur, mais qui produit toutefois un frottement plus considérable que le précédent.

5° Tige a coulisse.

181. Nous pouvons encore réaliser la transformation du mouvement

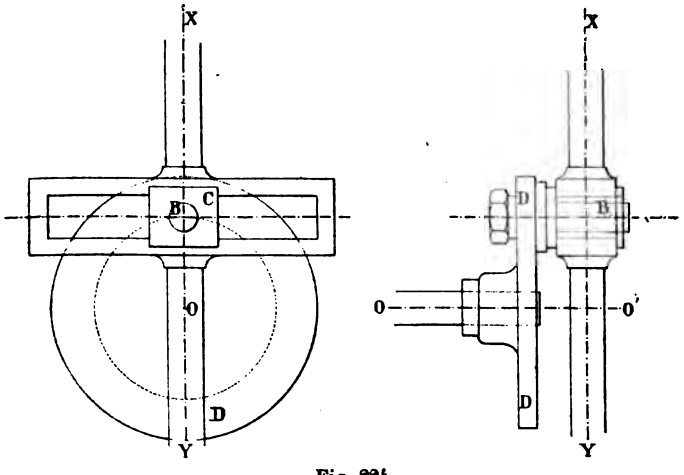


Fig. 224.

circulaire continu en rectiligne alternatif, en disposant sur l'arbre moteur O, un disque D portant perpendiculairement à son plan un bouton B qui agit, comme l'indique la figure 224, sur les côtés d'un cadre

Digitized by Google

étroit ou *coulisse* et qu'on arme, pour réduire l'usure provoquée par le frottement, d'un coussinet rectangulaire C glissant à frottement doux le long de la coulisse.

Ce dispositif communique à la tige un mouvement identique au mouvement circulaire uniforme du centre B du bouton projeté sur la direction XY du mouvement rectiligne.

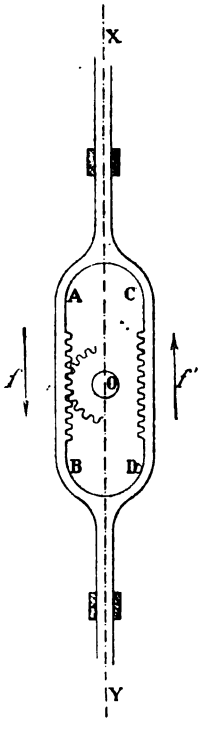


Fig. 225.

6° Crémaillère double.

182. Nous pouvons encore réaliser la même transformation de mouvement au moyen d'une crémaillère double représentée par la figure ci-contre. Le pignon O, denté seulement sur une partie de son contour, tourne à l'intérieur d'un cadre et peut engrener avec les côtés AB et CD qui jouent le rôle de crémaillères.

Mécanismes a rainures.

183. Lorsque les efforts à vaincre sont peu considérables, la transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif peut s'obtenir par l'intermédiaire de rainures pratiquées dans des disques circulaires, cylindriques ou coniques suivant la disposition des axes des mouvements.

a). *Les axes des mouvements se rencontrent et sont rectangulaires.*

Sur l'arbre O en mouvement de rotation (fig. 227), calons un disque D

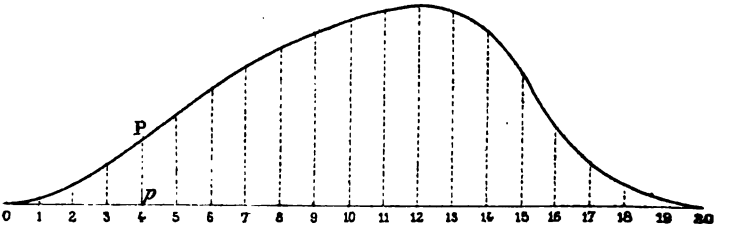


Fig. 226.

et pratiquons dans sa surface une rainure servant de guide à un bouton B

Digitized by Google

solidaire de la tige guidée T à laquelle nous devons communiquer un mouvement rectiligne alternatif connu. Son tracé s'effectue comme suit : OB désignant son plus petit rayon, nous construisons la courbe des espaces du mouvement de la tige (fig. 226) en prenant pour représenter le temps d'une révolution complète de l'arbre O le développement de la circonférence OB et à l'un quelconque P de ses points, répondant aux

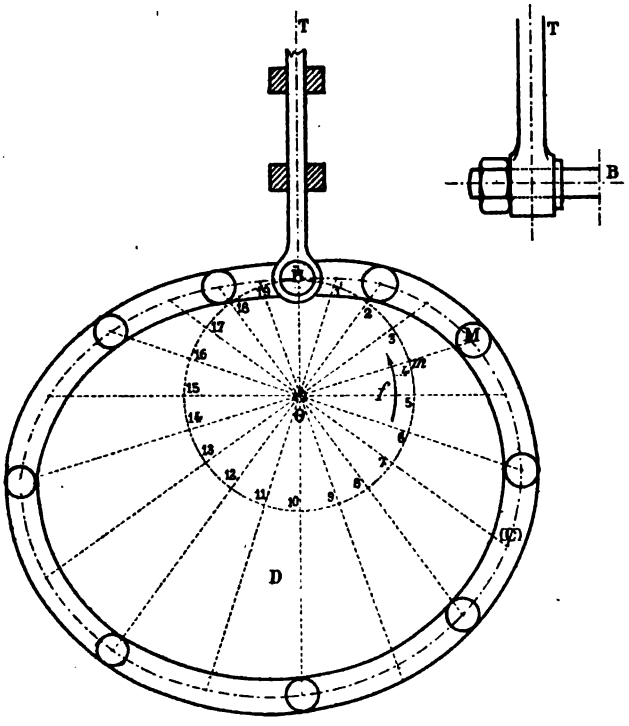


Fig. 227.

coordonnées $0p$ et pP, nous faisons correspondre le point M de la ligne moyenne (C) de la rainure ; il est déterminé par les relations :

$$\overset{\frown}{Bm} = 0p, \quad m\mathrm{M} = p\mathrm{P}.$$

Nous répétons un certain nombre de fois cette construction ; puis nous joignons par un trait continu tous les points obtenus et nous prenons finalement l'enveloppe du bouton B lorsque son centre décrit la courbe que nous venons de déterminer.

b) *Les axes des mouvements sont parallèles.*

Nous avons rencontré une transformation de ce genre § 89 ; elle

Digitized by Google

correspondait au cas où le mouvement de la tige était uniforme. Nous allons la généraliser et supposer à la tige un mouvement rectiligne alternatif varié.

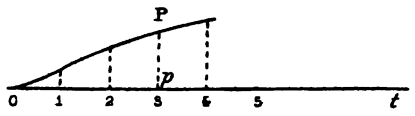


Fig. 228.

Sur l'arbre moteur (fig. 229), nous calons un cylindre de révolution OA et nous traçons la courbe des espaces du mouvement de la tige

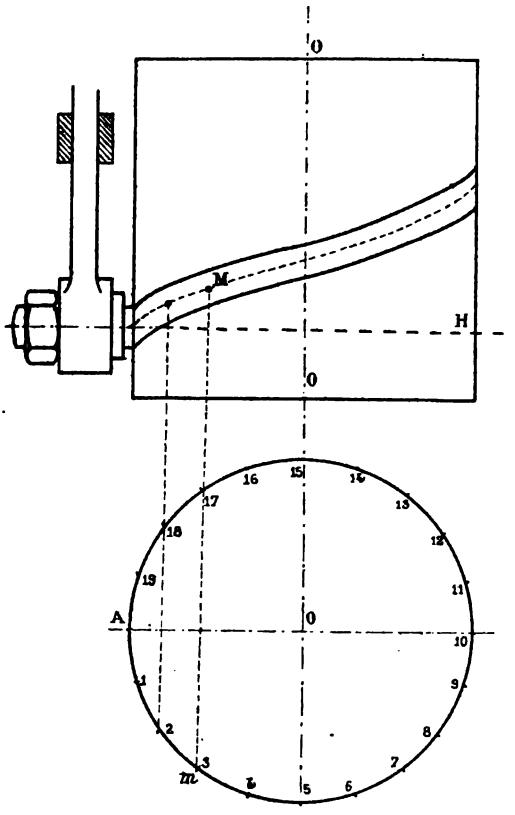


Fig. 229.

(fig. 228) en faisant correspondre au temps d'une révolution de l'arbre moteur le développement de la circonférence OA. Comme elle coïncide avec la transformée de la ligne moyenne de la rainure, nous obtien-

Digitized by Google

drons un point quelconque M de cette dernière en prenant pour son abscisse circulaire $\widehat{Am}$ la longueur $\frac{\pi OA}{3}$ et pour sa cote, au-dessus du plan horizontal H, la longueur de l'ordonnée pP. Les constructions s'achèvent ensuite comme précédemment.

c). *Les axes des deux mouvements se coupent à distance finie sous un angle quelconque.*

En pratiquant sur la surface obtenue § 163 une rainure admettant pour ligne moyenne la courbe C, nous réaliserons la transformation demandée.

Digitized by Google

Digitized by Google

LIVRE II

DEUXIÈME GENRE

TRANSMISSIONS PAR LIEN RIGIDE

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES ARTICULÉS PLANS

184. Définition. — On appelle système articulé plan, un ensemble de tiges assujetties à se mouvoir dans un même plan et articulées les unes aux autres par des pivots normaux à ce plan.

Cette définition, bien que n'étant pas générale, nous suffira pour l'exposition du programme que nous avons à remplir.

Comme les systèmes articulés formés par la réunion de deux ou de trois tiges ne permettent de réaliser aucune transformation de mouvement, nous les laisserons de côté et nous commencerons notre étude par celle du quadrilatère. Nous désignerons par A, B, C, D ses sommets et par a, b, c, d les longueurs de ses côtés dans l'ordre où on les rencontre en parcourant son périmètre dans le sens ABCD.

185. Pivot à révolution complète. — Un sommet ou pivot A d'un quadrilatère articulé ABCD est à révolution complète quand l'angle variable θ, formé par les deux tiges qu'il articule, peut prendre toutes les valeurs possibles de 0 à 360°.

186. Problème. — *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre les côtés a, b, c, d, du quadrilatère articulé* ABCD, *pour que son sommet* A *soit à révolution complète.*

Digitized by Google

Construisons avec les quatre longueurs données, le quadrilatère convexe ABCD (fig. 230); menons sa diagonale BD et considérons le triangle ABD. Il nous donne :

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta.$$

D'autre part, le côté BD du triangle BCD étant plus petit que la somme des deux autres côtés et plus grand que leur différence, nous pouvons écrire, ne sachant pas l'ordre de grandeur des côtés b et c :

$$(b-c)^2 < \overline{BD}^2 < (b+c)^2.$$

Par suite :

$$(b-c)^2 < a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta < (b+c)^2.$$

Ou bien encore :

$$\frac{a^2+d^2-(b+c)^2}{2ad} < \cos\theta < \frac{a^2+d^2-(b-c)^2}{2ad}.$$

Pour que le pivot A soit à révolution complète, il faut que son cosinus puisse prendre toutes les valeurs possibles entre -1 et $+1$, c'est-à-dire satisfasse aux nouvelles inégalités :

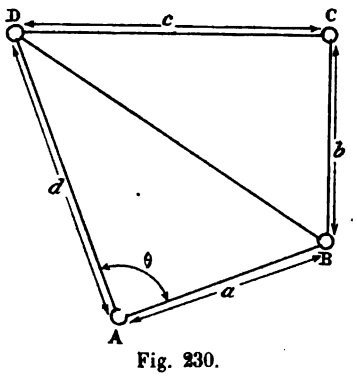


Fig. 230.

$$-1 < \cos\theta < 1,$$

ce qui exige, qu'entre les côtés a, b, c, d, existent les relations ;

$$\frac{a^2+d^2-(b+c)^2}{2ad} < -1,$$

et

$$\frac{a^2+d^2-(b-c)^2}{2ad} > 1,$$

qui peuvent encore s'écrire :

$$(d+a)^2-(c+b)^2 < 0,$$

et

$$(d-a)^2-(c-b)^2 > 0.$$

Elles expriment : *la première, que l'excès du carré de la somme des côtés qui aboutissent au pivot considéré sur le carré de la somme des deux autres est négatif ; la seconde, que l'excès du carré de la différence de ces mêmes côtés sur le carré de la différence des deux autres est positif.*

187. Théorème. — *Tout quadrilatère articulé, dont la somme du*

Digitized by Google

plus petit et du plus grand côtés est inférieure à la somme des deux autres, a deux pivots à révolution complète situés aux extrémités du plus petit côté.

Pour fixer les idées, raisonnons sur le quadrilatère satisfaisant, par exemple, aux conditions :

$$a < d \quad (1), \qquad b < c \quad (2),$$

et admettons que le pivot A soit à révolution complète. Les inégalités :

$$(d + a + c + b)(d + a - c - b) < 0,$$

et

$$(d - a + c - b)(d - a - c + b) > 0,$$

sont donc satisfaites et comme les sommes algébriques $a + b + c + d$, $d - a$ et $c - b$ sont essentiellement positives, elles se réduisent à :

$$d + a - c - b < 0, \qquad (3)$$

et

$$d - a - c + b > 0, \qquad (4)$$

et conduisent à la suivante :

$$a < b.$$

En effet, les inégalités (3) et (4) pouvant s'écrire :

$$(d - c) + (a - b) < 0,$$

et

$$d - c > a - b.$$

il est impossible que la différence $a - b$ soit positive, sans quoi la différence $d - c$ le serait également et la somme $(d - c) + (a - b)$ ne pourrait être négative.

Il en résulte que *le pivot* A *que nous avons supposé à révolution complète est à l'une des extrémités du plus petit côté du quadrilatère.*

Ceci posé, supposons les côtés du quadrilatère rangés par ordre de grandeur croissante et satisfaisant aux inégalités :

$$a < b < c < d, \qquad (\gamma)$$

$$a + d < b + c, \qquad (\delta)$$

Dans ces conditions, les pivots A et B sont à révolution complète.

a) *Le pivot* A *est à révolution complète* ; autrement dit, les inégalités :

$$d + a - c - b < 0,$$

$$(d - a + c - b)\ (d - a - c + b) > 0,$$

sont vérifiées.

Digitized by Google

La première l'est d'après l'hypothèse (δ); d'autre part les hypothèses (γ) permettant d'écrire :

$$\begin{cases} d-a>0 \\ c-b>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d-c>0 \\ b-a>0 \end{cases}$$

il en résulte que les deux sommes algébriques :

$$d-a+c-b, \qquad d-c+b-a$$

sont positives. Il en est donc de même de leur produit.

b) *Le pivot* B *est à révolution complète* ; autrement dit, les inégalités

$$(b+a)^2-(d+c)^2<0,$$
$$(b-a)^2-(d-c)^2>0.$$

sont vérifiées.

En effet, elles peuvent s'écrire :

$$(b+a+d+c)(b+a-d-c)<0,$$
$$(b-a+d-c)(b-a-d+c)>0.$$

Or, la somme $a+b+c+d$ étant positive et d'après l'hypothèse (γ),

$$a+b-d-c<0,$$

le premier membre de la première inégalité est un produit de deux facteurs, l'un positif, l'autre négatif; il est donc bien négatif.

Le premier facteur $(b-a)+(d-c)$ de la seconde inégalité est positif d'après les hypothèses (γ) ; le second l'est également d'après l'hypothèse δ. Leur produit l'est donc aussi et la seconde inégalité est bien vérifiée.

Avec des hypothèses différentes sur la grandeur des côtés du quadrilatère, nous vérifierions de la même façon l'énoncé du théorème qui est, par suite, tout à fait général.

Il en résulte que tout quadrilatère qui a des pivots à révolution complète, en a au moins deux.

188. Quadrilatères ayant trois ou quatre pivots à révolution complète. — *A priori,* il est facile d'établir qu'en recherchant les quadrilatères à trois pivots à révolution complète, nous obtiendrons ceux qui en ont quatre.

En effet, en écrivant que le pivot A est à révolution complète, nous sommes assurés, d'après la théorie qui précède, que l'un des pivots B ou D l'est aussi ; mais ne connaissant pas l'ordre de grandeur des côtés, nous ne pouvons préciser lequel.

Digitized by Google

Dans cette ignorance, nous devons assujettir le troisième pivot C à être à révolution complète et les nouvelles inégalités que nous sommes conduits à écrire expriment encore que les pivots B ou D sont à révolution complète.

Dans le cas où les deux groupes d'inégalités expriment en même temps que le pivot B est à révolution complète, le quadrilatère correspondant a seulement les trois pivots A, B, C à révolution complète.

Dans le cas au contraire où le premier groupe d'inégalités exprime que les pivots A et B sont à révolution complète et le second que ce sont les pivots C et D qui satisfont à la même condition, le quadrilatère correspondant a quatre pivots à révolution complète.

Ceci posé, écrivons les groupes d'inégalités dont nous venons de parler :

$$\begin{cases} (d+a)^2-(c+b)^2<0 & (1)\\ (d-a)^2-(c-b)^2>0 & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+b)^2-(d+a)^2<0\\ (c-b)^2-(d-a)^2>0\end{cases}$$

et substituons a ce dernier le suivant qui lui est équivalent:

$$\begin{cases} (d+a)^2-(c+b)^2>0 & (3)\\ (d-a)^2-(c-b)^2<0 & (4)\end{cases}$$

obtenu en changeant les signes des deux membres de chaque inégalité. Si nous comparons d'une part les inégalités (1) et (3), d'autre part les

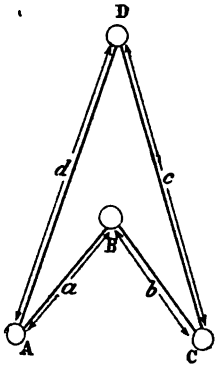


Fig. 231.

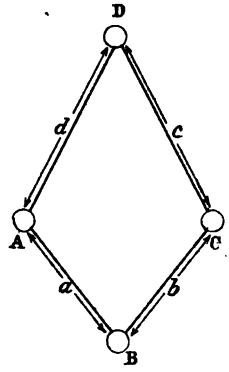


Fig. 232.

inégalités (2) et (4), comme elles expriment qu'une même expression algébrique doit être à la fois positive et négative, elles conduisent aux équations suivantes :

$$(d+a)^2-(c+b)^2=0$$
$$(d-a)^2-(c-b)^2=0$$

Digitized by Google

qui peuvent s'écrire :

$$(d+a+c+b)(d+a-c-b)=0$$
$$(d-a+c-b)(d-a-c+b)=0$$

et se partagent alors en deux groupes :

$$(\mathrm{I})\begin{cases} d+a-c-b=0 \\ d-a-c+b=0 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} d+a-c-b=0 \\ d-a+c-b=0 \end{cases}$$

équivalents respectivement aux deux suivants :

$$(\mathrm{I}')\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \qquad (\mathrm{II}')\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

Le premier correspond aux quadrilatères *fer de lance* ou *cerf-volant* (fig. 231 et 232) qui ont trois pivots à révolution complète et deux côtés consécutifs égaux.

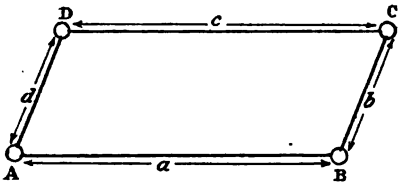


Fig. 233.

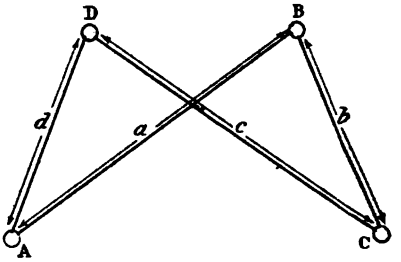


Fig. 234.

Le second correspond aux *parallélogramme* et *contre-parallélogramme* (fig. 233 et 234) qui ont quatre pivots à révolution complète et deux côtés opposés égaux.

Énumération des transformations de mouvements obtenus a l'aide d'un quadrilatère articulé.

189. Partant d'un quadrilatère articulé et rendant fixe l'un de ses membres appelé *pont*, nous obtenons un mécanisme qui nous permet de réaliser certaines transformations de mouvement. Aux deux membres qui aboutissent aux extrémités du pont nous donnons les noms de *manivelles ou oscillateurs* et à celui qui est articulé à leurs extrémités celui de *bielle*.

Nous laisserons de côté les quadrilatères absolument arbitraires pour étudier ceux qui ont deux ou plusieurs pivots à révolution complète.

a) Quadrilatères a deux pivots a révolution complète. — Les deux

Digitized by Google

pivots O et O′ (fig. 235) étant, par exemple, à révolution complète, OO′ est le plus petit côté du quadrilatère OAO′A′ et si nous désignons par c le plus grand, entre ses quatre côtés existe la relation :

$$a + c < b + d.$$

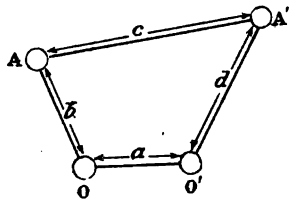


Fig. 235.

α) *Le pont est le côté a.* — Le mécanisme obtenu permet alors de transformer une rotation continue de l'arbre O en une rotation continue de l'arbre O′ avec un rapport variable de vitesses angulaires.

β) *Le pont est l'un des côtés b ou d.* — Dans les deux cas nous réalisons le même mécanisme, car le membre b se comporte par rapport au pivot O comme le membre d par rapport au pivot O′. Il permet de transformer le mouvement circulaire continu de l'arbre O en un mouvement circulaire alternatif de l'arbre A ; ses membres OO′ et AA′ constituent la manivelle et l'oscillateur.

γ) *Le pont est le côté c.* — Le mécanisme correspondant permet de transformer le mouvement circulaire alternatif de l'arbre A en un mouvement circulaire alternatif de l'arbre A′ ; ses deux membres OA, O′A′ sont les oscillateurs.

b) Quadrilatères a trois pivots a révolution complète (fig. 231 et 232) — α) *Le pont est le côté a.* — Le mécanisme correspondant permet de transformer une rotation continue de l'arbre A en une rotation continue de l'arbre B avec un rapport de vitesses angulaires variable ; ses deux membres b et d sont les manivelles.

Le membre b, rendu fixe, se comportant par rapport aux pivots B et C comme le membre a se comportait par rapport aux pivots A et B, le mécanisme correspondant réalise la même transformation de mouvement que le précédent.

β) *Le pont est l'un des côtés d ou c.* — Le membre d jouant par rapport aux pivots A et D le même rôle que le membre c par rapport aux pivots C et D, le mécanisme obtenu en fixant l'un d'eux, CD par exemple, permet de transformer une rotation continue en une rotation alternative ; ses membres BC et AD sont respectivement la manivelle et l'oscillateur.

c) Quadrilatères a quatre pivots a révolution complète (fig. 233 et 234). — Les quadrilatères à quatre pivots à révolution complète permettent, quel que soit le pont, de transformer une rotation continue en une rotation continue. Les mouvements obtenus se distinguent cependant les uns des autres comme nous allons l'établir.

Digitized by Google

α) *Parallélogramme.* — *a* étant par exemple le pont, la bielle CD lui est constamment parallèle et le rapport des vitesses angulaires des arbres A et B reste constant pendant tout le mouvement. Le mécanisme correspondant, le seul que nous ayons rencontré jusqu'alors, permet donc de transformer une rotation continue en une rotation continue parallèle avec rapport de vitesses angulaires constant.

β) *Contre-parallélogramme.* — Les côtés de ce quadrilatère étant deux à deux égaux, nous pouvons en déduire deux mécanismes :

a) Le pont est le côté *a*. — Le mécanisme correspondant permet de transformer une rotation continue de l'arbre A en une rotation continue de même sens de l'arbre B avec rapport de vitesses angulaires variable.

b) Le pont est le côté *b*. — La transformation de mouvement réalisée dans ce cas est identique à la précédente, mais les deux rotations sont toutefois de sens contraires.

190. Mécanismes déduits du quadrilatère articulé. — Reprenons le quadrilatère articulé transformé en mécanisme par l'immobilité du côté *d* et supposons qu'il permette de transformer une rotation continue de l'arbre O en une rotation alternative de l'arbre O′ ; ses quatre côtés vérifient alors la relation :

$$a + d < b + c.$$

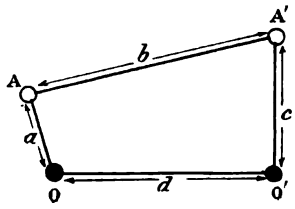


Fig. 236.

Si nous le modifions en substituant à l'oscillateur *c* un coulisseau assujetti à se déplacer dans une coulisse pratiquée dans le membre *d* nous obtenons le nouveau mécanisme indiqué par la figure 237. Il permet

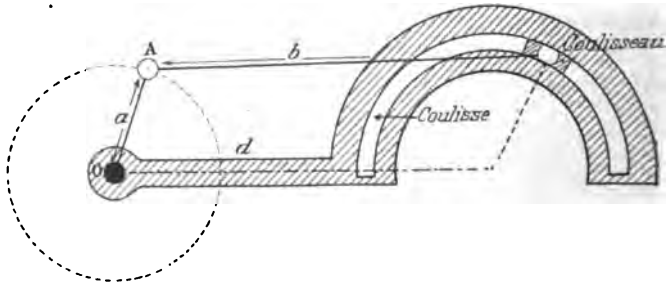


Fig. 237.

de réaliser la même transformation de mouvement que précédemment.

Digitized by Google

Si alors nous supposons au coulisseau un rayon infini, le système articulé précédent se transforme encore, devient celui de la figure 238 et

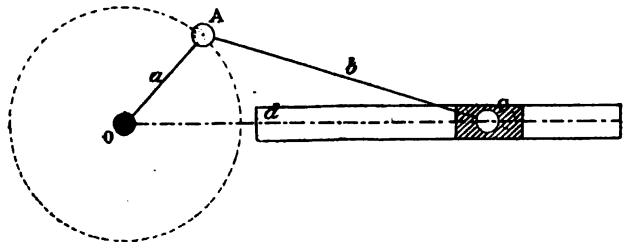


Fig. 238.

permet de réaliser un certain nombre de transformations de mouvements que nous allons étudier.

α) *Le pont est le côté a.* — Le mécanisme obtenu (fig. 239) permet de transformer, par l'intermédiaire d'une coulisse et d'un coulisseau, une rotation continue et uniforme d'un arbre O en une rotation continue mais variée d'un arbre O′ parallèle au premier.

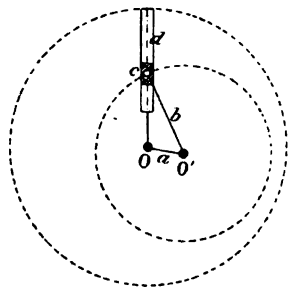


Fig. 239.

β) *Le pont est le côté b.* — Le coulisseau (fig. 240) peut alors simplement tourner autour du point O′ et la coulisse, tout en prenant un mouvement rectiligne alternatif suivant sa propre direction, oscille autour de ce point. Le mécanisme correspondant, permettant de transformer un

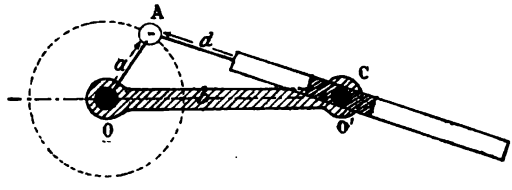


Fig. 240.

Digitized by Google

mouvement continu de rotation d'un arbre O en un mouvement oscillatoire d'une coulisse, porte le nom de *mécanisme à coulisse oscillante*.

Si l'on échange les membres *c* et *d* (fig. 241), le membre *c* prend alors un mouvement rectiligne alternatif et la coulisse oscille autour

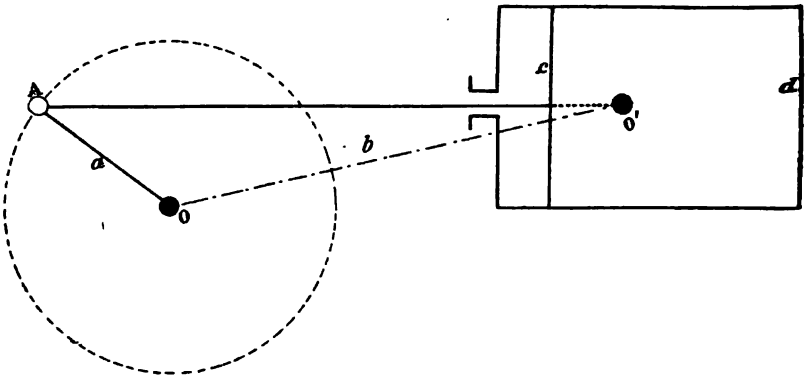


Fig. 241.

de l'arbre O'. Le mécanisme correspondant se rencontre fréquemment dans les machines à vapeur.

Rien ne s'oppose d'ailleurs à ce que le coulisseau soit solidaire du bouton A de la manivelle OA (fig. 242). S'il en est ainsi, on obtient

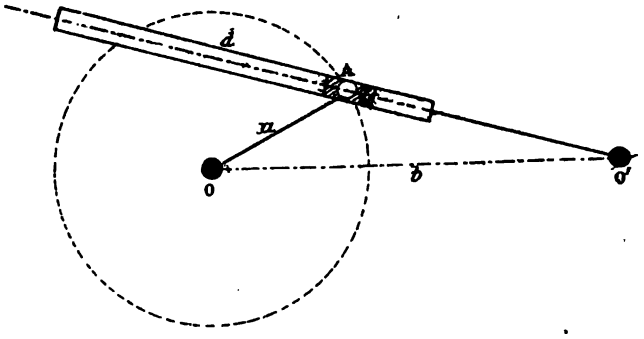


Fig. 242.

un nouveau dispositif très employé dans les petites machines à raboter et qui permet de communiquer à l'outil un mouvement à retour rapide.

γ) *Le pont est le côté c.* — Le membre *b* prend alors un mouvement circulaire oscillatoire auquel correspond un mouvement rectiligne alternatif de la coulisse.

Digitized by Google

δ) *Le pont est le côté d.* — Le mécanisme correspondant (fig. 243) permet de transformer le mouvement rectiligne alternatif du coulisseau

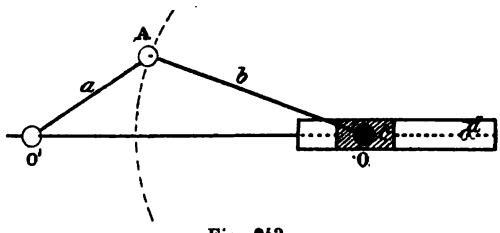


Fig. 243.

en un mouvement circulaire continu de l'arbre O ou inversement. Il trouve son application dans un grand nombre de machines.

Digitized by Google

CHAPITRE II

—

GÉNÉRALITÉS SUR LES POINTS MORTS DANS LES MÉCANISMES.

191. On appelle *point mort* dans un mécanisme toute position du système pour laquelle la force motrice ne produit sur lui aucun effet ou bien encore se comporte à son égard comme si elle agissait sur un corps inerte. En général, si au moment de la mise en marche de la machine le mécanisme occupe une telle position, il peut ou rester immobile ou conduire à des mouvements différents de celui qu'on se propose de réaliser et qu'il faut par suite évincer.

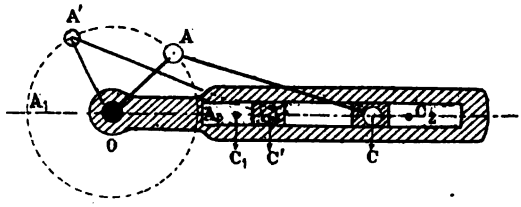


Fig. 244.

Pour l'établir, considérons en premier lieu le système bielle et manivelle (fig. 244) permettant de transformer un mouvement rectiligne alternatif en circulaire continu. Dans la position A_1C_1 d'un point mort, la force motrice, agissant sur le coulisseau C_1 dans la direction OC_1, se trouve détruite par la résistance de l'arbre O et ne produit aucun effet sur la manivelle OA_1. Il n'y a donc pas possibilité de mouvement.

Considérons, en second lieu, le système bielle et manivelles (fig. 245) permettant de transformer un mouvement circulaire continu en circulaire continu avec rapport de vitesses angulaires constant. Si la position $OA_1O'A'_1$, où tous les membres du mécanisme sont en ligne droite, correspond à celle de la mise en marche et si la manivelle motrice OA_1 vient à tourner dans le sens de la flèche *f*, par exemple, l'autre manivelle peut ou tourner dans le même sens et on réalise ainsi la transformation demandée, ou tourner en sens inverse et ce mouvement, tout différent de celui qu'on se propose d'obtenir, doit être évité.

Digitized by Google

On remédie à ces inconvénients par l'introduction dans le mécanisme d'une nouvelle chaîne cinématique reliée à la première comme l'indiquent les figures et assujettie à se trouver dans une position active toutes les fois que la première correspond à une position des points morts ou inversement. Elle permet donc de les franchir avec le mouvement demandé.

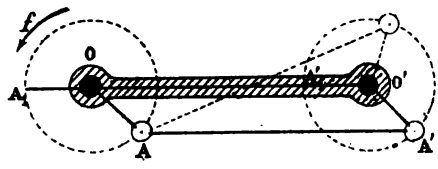


Fig. 245.

On peut encore obtenir ce résultat par l'introduction de nouveaux couples d'éléments conjugués.

Pour le bien faire comprendre, étudions, par exemple, la transformation, par lien rigide, d'un mouvement circulaire continu en circulaire continu avec rapport de vitesses angulaires variable. Elle comporte deux cas :

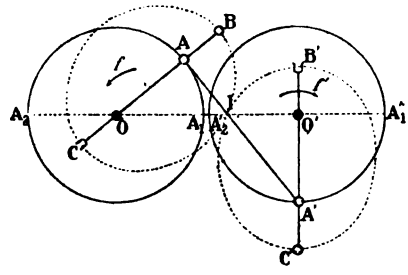


Fig. 246.

a) *Les deux rotations sont de sens contraires.* — Les deux manivelles OA, O'A', la bielle AA' et le pont OO' forment un contre-parallélogramme (fig. 246) et si à la position $OA_1O'A'_1$ du mécanisme, où tous ses membres sont en ligne droite, correspond sa mise en marche, la manivelle O'A' peut se déplacer dans deux sens différents.

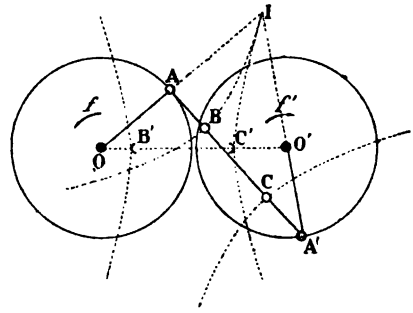


Fig. 247.

Pour éviter celui qui ne correspond pas à la transformation de mouvement demandée, étudions, par exemple, le mouvement relatif de la manivelle OA par rapport à la manivelle O'A'. Il correspond à celui d'un système invariable dont deux points décrivent des circonférences égales, et peut s'obtenir, comme nous l'avons établi en cinématique théorique § 150, en faisant rouler l'ellipse de foyers O' et A' et de grand axe OO' sur une ellipse égale de foyers O et A.

Il en résulte que si nous considérons chacune de ces ellipses comme liées invariablement aux manivelles qui leur correspondent, il suffira que la première OA reçoive son mouvement de l'arbre moteur pour

Digitized by Google

qu'elle communique à l'autre manivelle et par suite à l'arbre O′ le mouvement demandé.

Dans les positions $OA_1O'A'_1$, $OA_2O'A'_2$ des points morts, ces deux ellipses viennent en contact d'une part par les points B et B′, d'autre part par les points C et C′. Si donc nous pratiquons sur la manivelle OA une dent B et si nous cherchons son enveloppe lorsque l'ellipse OA à laquelle elle est invariablement liée roule sur l'autre, nous obtenons la forme du creux B′ que nous devons ménager sur la manivelle O′A′ pour franchir la première position; par analogie la dent C′ et le creux C permettent de franchir la deuxième position des points morts.

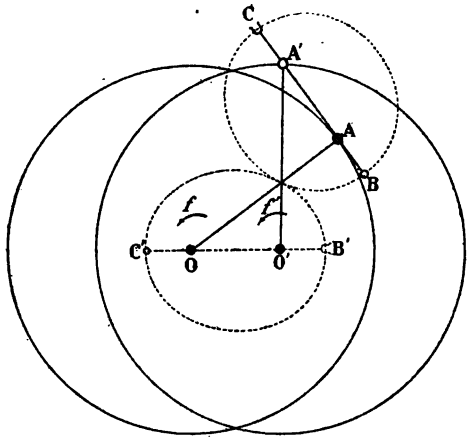


Fig. 248.

Nous aurions pu (fig. 247), par un raisonnement identique, trouver la forme de nouveaux couples d'éléments (B.B′), (C.C′) qu'on peut disposer sur la bielle et le pont pour obtenir le même résultat.

b) *Les deux rotations sont de même sens.* — Les deux membres du parallélogramme qui sont accouplés dans ce cas sont les plus longs (fig. 248). Comme précédemment, nous recherchons les mouvements relatifs de la bielle par rapport au pont et du pont par rapport à la bielle. Puis nous pratiquons une dent en B sur la bielle AA′ et nous cherchons son enveloppe lorsque l'ellipse AA′ roule sur l'ellipse OO′ ; elle nous donne la forme B′ du creux à ménager sur le pont pour assurer la continuité du mouvement transmis. Nous déterminons d'une façon analogue le second couple d'éléments (C. C′) qui permet au mécanisme de franchir la seconde position des points morts.

Digitized by Google

PREMIÈRE CLASSE

—

LIAISON DE DEUX ROTATIONS

—

CHAPITRE III

TRANSFORMATION D'UNE ROTATION CONTINUE EN UNE ROTATION CONTINUE AVEC RAPPORT DE VITESSES ANGULAIRES CONSTANT.

192. L'étude faite précédemment des transformations de mouvement qu'on peut réaliser avec un quadrilatère articulé, nous a montré que le parallélogramme seul permet d'obtenir celle qui nous occupe. Comme d'ailleurs la bielle est constamment parallèle à la ligne des centres, l'arbre moteur et l'arbre à conduire tournent constamment avec la même vitesse angulaire et l'on s'affranchit des points morts comme nous l'avons indiqué § 191.

On trouve, dans la pratique, une application de cette théorie dans les roues couplées des locomotives.

Digitized by Google

DEUXIÈME CLASSE

—

LIAISON DE DEUX ROTATIONS

—

CHAPITRE IV

TRANSFORMATION D'UNE ROTATION CONTINUE OU ALTERNATIVE EN UNE ROTATION CONTINUE OU ALTERNATIVE AVEC RAPPORT DE VITESSES ANGULAIRES VARIABLE.

Transformation d'une rotation continue en une rotation continue.

1° *Par quadrilatères articulés, plans.*

193. Pour transformer par lien rigide une rotation continue en une rotation continue, nous pouvons utiliser tous les quadrilatères articulés qui ont au moins deux pivots à révolution complète. Nous nous contenterons d'employer, dans l'analyse qui va suivre : 1° celui pour lequel les manivelles et la bielle ont une même longueur inférieure à celle du pont; 2° le contre-parallélogramme, et nous distinguerons le cas où les rotations sont de même sens de celui où elles sont de sens contraires.

a) Les deux rotations sont de même sens.

1° Emploi du quadrilatère articulé ayant ses trois membres OA, O'A', AA' égaux. — Si dans le quadrilatère articulé OAO'A' (fig. 249) pour lequel :

$$OA = O'A' = AA' < OO',$$

nous choisissons comme pont le côté OO', nous obtenons un mécanisme qui permet de transformer une rotation continue de l'arbre O en une rotation continue de l'arbre O'.

α) *Étude du mouvement de l'arbre à conduire.* — A l'instant consi-

Digitized by Google

déré, désignons par B le point de rencontre de la bielle avec la ligne des centres, par V' la vitesse linéaire du bouton A' et par ω et ω' les vitesses angulaires des arbres O et O' ; nous pouvons alors écrire :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{BO}{BO'},$$

ou bien encore :

$$\omega' = \omega \times \frac{BO}{BO'}.$$

La vitesse du bouton A' a donc pour expression :

$$V' = \omega' \,.\, OA = \omega \,.\, OA \,.\, \frac{BO}{BO'},$$

et comme les deux triangles BOP et BO'A', obtenus en menant par le point O la parallèle OP à la bielle O'A', sont semblables, les deux rapports $\frac{BO}{BO'}$ et $\frac{OP}{O'A'}$ sont égaux et l'expression précédente peut s'écrire :

$$V' = \omega \times OP.$$

Graphiquement, à une échelle convenable, la longueur OP peut représenter la vitesse du bouton A' à l'instant considéré.

Dans l'hypothèse où l'arbre moteur O est animé d'un mouvement de rotation uniforme, l'étude des variations de la vitesse du bouton A' revient à celle du rapport $\frac{BO}{BO'}$.

Pour fixer les idées, supposons qu'à l'origine du mouvement le bouton A' se trouve au point 0' sur la ligne des centres ; le point B coïncide alors avec lui, puis s'éloigne ensuite vers le bas. La distance BO augmente donc et comme le rapport précédent peut s'écrire :

$$\frac{BO}{BO'} = \frac{BO}{BO + d} = \frac{1}{1 + \frac{d}{BO}}.$$

il augmente lui aussi jusqu'au moment où le point B est à l'infini, position pour laquelle la bielle est parallèle à la ligne des centres.

Après quoi, le point B passe de l'autre côté du segment OO' et se rapproche ensuite de l'arbre O'. Comme nous pouvons écrire :

$$\frac{BO}{BO'} = \frac{BO}{BO - d} = \frac{1}{1 - \frac{d}{BO}},$$

et que BO décroît jusqu'au moment où le bouton A vient à nouveau sur la ligne des centres, le rapport précédent croît encore.

Le mouvement du bouton A' ou bien encore celui de l'arbre O' est

Digitized by Google

donc varié, accéléré depuis le moment où la manivelle à conduire coïncide avec la ligne des centres jusqu'au moment où la manivelle motrice vient en coïncidence avec cette ligne après une rotation supérieure à 180° : après quoi il devient varié retardé.

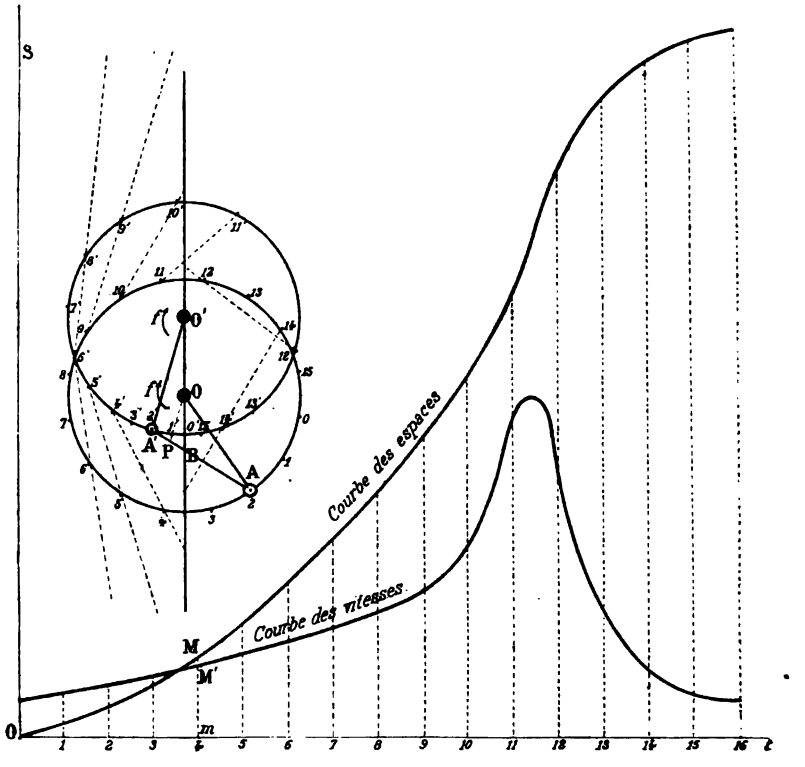


Fig. 249.

β) Courbes des espaces et des vitesses du mouvement du bouton A'. — a) *Courbe des espaces.* — La rotation de l'arbre moteur s'effectuant dans le sens de la flèche *f*, du point 0' comme centre, avec la longueur de la bielle pour rayon, décrivons un arc de circonférence et prenons son point de rencontre 0 avec la trajectoire du bouton A. Divisons-la ensuite, à partir de ce point, en seize parties égales ; puis de chacun des points de division 0, 1, 2, 3, 4, ... obtenus, avec la longueur de la bielle pour rayon, décrivons des arcs de circonférence et marquons les points 0', 1', 2', 3', 4', ... où ils viennent couper la trajectoire du bouton A'. Enfin sur un graphique marquons le point M dont les coordonnées, par rapport aux axes *ot*, *os*, ont pour expressions :

$$Om = \widehat{0.4}, \qquad mM = \widehat{0'.4'},$$

Digitized by Google

et répétons un certain nombre de fois cette construction. En joignant tous les points obtenus par un trait continu, nous déterminons ainsi la courbe des espaces du mouvement du bouton A'.

b) *Courbe des vitesses.* — Nous pourrions la déduire de la précédente comme nous l'avons établi en cinématique théorique § 52. Mais nous pouvons aussi procéder plus simplement :

La formule :

$$V' = \omega \times OP,$$

établie précédemment, montre, qu'à l'instant considéré, la vitesse du bouton A' est proportionnelle à la longueur OP. Si donc, sur un graphique, nous lui faisons correspondre l'ordonnée mM' égale à OP, les différentes ordonnées de la courbe des vitesses auront des longueurs respectivement égales à celles des rayons vecteurs de la courbe lieu du point P.

2° Emploi du contre-parallélogramme. — Nous pouvons encore réaliser la transformation de mouvement précédente au moyen du contre-parallélogramme transformé en mécanisme en prenant pour pont l'un des deux plus petits côtés OO' que nous supposerons égal à $2a$.

a) *Étude du mouvement de l'arbre à conduire.* — En conservant les notations précédentes, nous pouvons écrire :

$$V' = \omega' \times O'A' = \omega \times O'A' \times \frac{BO}{BO'} = \omega \times O'A' \times \frac{OP}{O'A'} = \omega \times OP.$$

Il en résulte que la position occupée par le point B sur la ligne des centres nous permet de conclure la nature du mouvement du bouton A' ou bien encore celle de l'arbre à conduire. Pour la déterminer, remarquons que la différence BO — BA étant égale à $2a$ nous pouvons, à chaque instant, la regarder comme l'intersection de la ligne des centres avec une hyperbole de foyers O et A, de grand axe $2a$, tangente au point B à la droite IB et invariablement liée à la manivelle motrice. Par analogie, la différence BA' — BO' étant égale aussi à $2a$, nous pouvons encore la

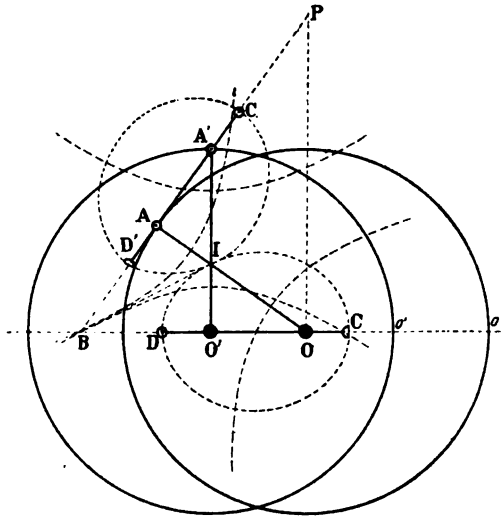


Fig. 250.

Digitized by Google

regarder comme l'intersection de la ligne des centres avec une seconde hyperbole de foyers O' et A', égale à la précédente, tangente au point B à la droite IB et invariablement liée à la seconde manivelle O'A'.

Comme d'ailleurs la relation :

$$\omega \times BO = \omega' \times BO',$$

est satisfaite à chaque instant, ces deux courbes roulent l'une sur l'autre et au mouvement du mécanisme, nous pouvons donner le nom *de mouvement hyperbolique*.

Ceci posé, désignons par $2c$ la longueur commune des deux manivelles que nous supposons pour fixer les idées dans le prolongement l'une de l'autre à l'origine du mouvement. Les boutons A et A' occupent alors les positions 0 et 0' et le point B coïncide avec le point C. La distance OC valant $c - a$, le rapport $\frac{BO}{BO'}$ a pour expression $\frac{c-a}{c+a}$ et la vitesse du bouton A' a au départ la valeur :

$$V' = \omega' \times O'A' \times \frac{c-a}{c+a}.$$

Après quoi le point B s'éloignant vers la droite jusqu'à l'infini, position pour laquelle la bielle AA' est parallèle à la ligne des centres, le segment BO' augmente et comme le rapport $\frac{BO}{BO'}$ peut s'écrire :

$$\frac{BO}{BO'} = \frac{BO' - 2a}{BO'} = 1 - \frac{2a}{BO'},$$

il augmente lui-même et le mouvement du bouton A' est varié accéléré.

Ensuite le point B passe à gauche sur le segment OO' et se rapproche du point O' jusqu'à ce qu'il atteigne sa position limite D. Le segment BO' diminue donc et comme le rapport $\frac{BO}{BO'}$ peut s'écrire :

$$\frac{BO}{BO'} = \frac{BO' + OO'}{BO'} = 1 + \frac{2a}{BO'},$$

il augmente encore et le mouvement du bouton A' est encore accéléré. La valeur limite de sa vitesse est :

$$V' = \omega' \times O'A' \times \frac{c+a}{c-a}.$$

Après quoi, il devient retardé.

En résumé, le mouvement du bouton A' est accéléré pendant la première demi-révolution de la manivelle motrice, retardé pendant la demi-révolution suivante et ainsi de suite indéfiniment.

Digitized by Google

Pour ne pas faire double emploi avec l'exemple qui va suivre, nous laisserons de côté les courbes des espaces et des vitesses du mouvement de ce bouton.

b) *Points morts.* — Pour que le mouvement étudié se produise quelle que soit la position initiale du mécanisme, nous lui adjoignons deux nouveaux couples (C . C'), (D . D') d'éléments conjugués obtenus par les considérations développées § 191.

b) Les deux rotations sont de sens contraires.

1° Emploi du contre-parallélogramme. — α) *Étude du mouvement de l'arbre à conduire.* — Nous réalisons la transformation de mouvement demandée en employant encore le contre-parallélogramme et en plaçant le pont sur l'un de ses grands côtés (fig. 251).

Comme précédemment, l'étude des variations du rapport $\frac{BO}{BO'}$ conduit à la détermination de la nature du mouvement du bouton A' ou bien encore à celle de l'arbre à conduire. Pour la faire, remarquons que la somme BO + BA étant constamment égale à $2a$, nous pouvons regarder le point B comme l'un des points d'intersection avec la ligne des centres d'une ellipse de foyers O et A, de grand axe $2a$ et invariablement liée à la manivelle OA. Par analogie, comme la somme BO' + BA' est aussi constamment égale à $2a$, nous pouvons encore le regarder comme l'un des points d'intersection de la ligne des centres avec une seconde ellipse de foyers O' et A', égale à la précédente et invariablement liée à la manivelle O'A'. Elles sont tangentes l'une et l'autre à la droite IB et comme les vitesses angulaires des arbres O et O' sont liées par la relation :

$$\omega \times OB = \omega' \times O'B,$$

elles roulent l'une sur l'autre.

Si donc nous faisons rouler l'ellipse OA mobile autour de l'arbre O sur l'ellipse O'A' mobile autour de l'arbre O', nous reproduisons le mouvement du système articulé auquel nous pouvons donner le nom *de mouvement elliptique.*

Comme précédemment, le rapport $\frac{BO}{BO'}$ partant de la valeur $\frac{a-c}{a+c}$, augmentant pendant la première demi-révolution de la manivelle OA jusqu'à la valeur $\frac{a+c}{a-c}$ et décroissant ensuite, le mouvement du bouton A' est varié, accéléré pendant la première demi-révolution de l'arbre

Digitized by Google

moteur et retardé pendant la demi-révolution suivante et ainsi de suite pendant les révolutions suivantes.

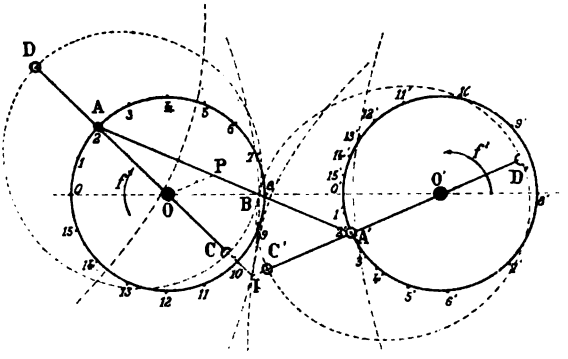


Fig. 251.

β) *Points morts.* — Quand les boutons de manivelles occupent les

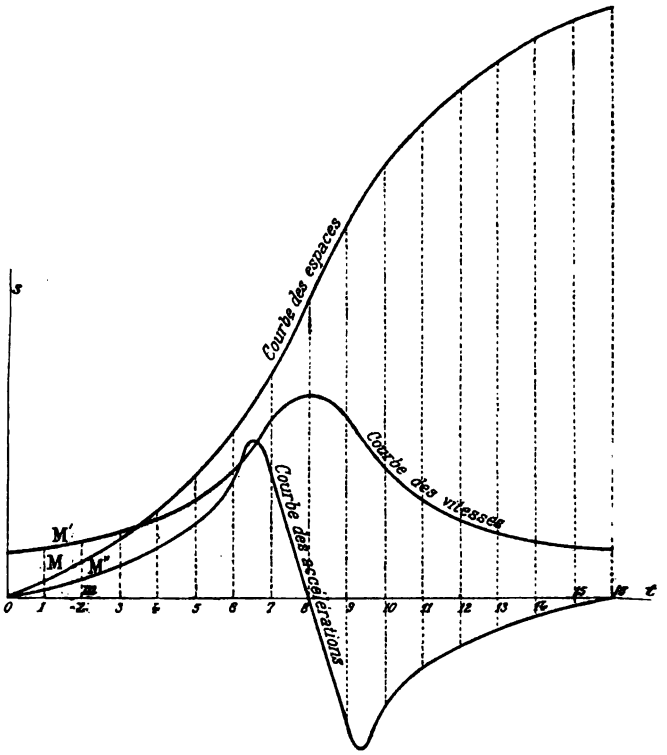


Fig. 252.

positions (0 . 0'), (8 . 8'), le mécanisme se trouve dans celles des points morts et pour que son mouvement soit bien celui étudié, quelle que soit

Digitized by Google

sa position initiale de départ, nous avons disposé en (C . C') d'une part, en (D . D') d'autre part deux couples d'éléments conjugués.

γ) Courbes des espaces, des vitesses et des accélérations du mouvement du bouton A'. — a) *Courbes des espaces.* — Pour obtenir cette courbe, nous opérons de la façon suivante : Nous partageons la circonférence OA en seize parties égales et nous numérotons 0, 1, 2, 3, 4, ... les points de division obtenus ; puis, de chacun d'eux comme centres, avec la longueur de la bielle pour rayon, nous décrivons des arcs de circonférence et nous prenons leurs points de rencontre 0', 1', 2', 3', 4', ... avec la trajectoire du bouton A'. Nous déterminons ensuite le point M qui, par rapport aux axes O*t* et O*s*, a pour coordonnées : $Om = \widehat{0.2}$, $mM = \widehat{0'.2'}$ et nous répétons un certain nombre de fois cette construction. En joignant par un trait continu les différents points obtenus, nous déterminons la courbe des espaces du bouton A'.

b) *Courbe des vitesses.* — A l'instant considéré, la vitesse du bouton A' étant proportionnelle au segment OP, nous pouvons prendre pour ordonnée correspondante de la courbe des vitesses le segment OP lui-même. Avec cette condition, le point M' dont les coordonnées sont :

$$Om = \widehat{0.2}, \qquad mM' = OP,$$

appartient à la courbe cherchée.

c) *Courbe des accélérations.* — La courbe des accélérations se déduit de celle des vitesses d'après les règles établies en cinématique théorique § 85.

2° *Par la liaison d'une manivelle à bouton et d'une manivelle à coulisse.*

194. — Nous pouvons encore réaliser la transformation de mouvement demandé au moyen du mécanisme représenté par la figure 253 ; il correspond à la liaison de deux manivelles, l'une à bouton, l'autre à coulisse.

α) *Étude du mouvement de l'arbre à conduire.* — Supposons que l'arbre O tourne d'un mouvement uniforme avec une vitesse angulaire ω et proposons-nous d'étudier celui de l'arbre à conduire. Désignons, à cet effet, par ω' sa vitesse angulaire à l'instant considéré, par α et β les angles AOX, AO'X, par *a* la distance OO' et par *r* le rayon de la manivelle OA.

La définition même de la vitesse angulaire d'un point nous permet d'écrire :

Digitized by Google

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \qquad \omega' = \frac{d\beta}{dt}.$$

Par suite :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Pour évaluer ce rapport, considérons le triangle OAO' ; il nous conduit à l'équation :

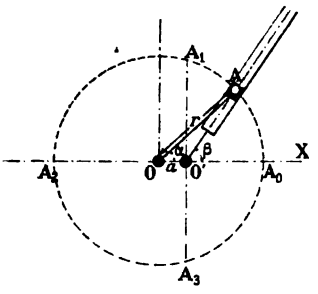


Fig. 253.

$$\frac{a}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{r}{\sin\beta},$$

ou :

$$a \sin\beta = r(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta).$$

De laquelle nous déduisons la suivante :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha - a}.$$

En différentiant ses deux membres, il vient :

$$\frac{d\beta}{\cos^2\beta} = \frac{(r^2 - ar\cos\alpha)d\alpha}{(r\cos\alpha - a)^2},$$

et si nous y remplaçons $\cos^2\beta$ par sa valeur $\dfrac{(r\cos\alpha - a)^2}{r^2\sin^2\alpha + (r\cos\alpha - a)^2}$, nous sommes finalement conduits à l'équation :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{r^2 - ar\cos\alpha}{r^2 - 2ar\cos\alpha + a^2}.$$

Pour la discuter, posons $\cos\alpha = x$; son second membre peut alors s'écrire :

$$f(x) = \frac{r(r - ax)}{r^2 - 2arx + a^2},$$

et nous étudions ses variations, résumées dans le tableau suivant, en faisant varier x de -1 à $+1$

x	-1		0		$+1$
$f'(x) = \dfrac{ar(r^2 - a^2)}{(r^2 - 2arx + a^2)^2}$	positive				
$f(x) = \dfrac{\omega'}{\omega}$	$\dfrac{r}{r+a}$	croît	$\dfrac{r^2}{r^2+a^2}$	croît	$\dfrac{r}{r-a}$

Pendant que le bouton A parcourt l'arc $\widehat{A_0A_1A_2}$ de sa trajectoire, la

Digitized by Google

manivelle à coulisse a donc un mouvement retardé et sa vitesse angulaire varie de la valeur $\frac{\omega r}{r-a}$, supérieure à ω, à la valeur $\frac{\omega r}{r+a}$, inférieure à cette même valeur; après quoi son mouvement devient accéléré.

Il existe par suite deux positions de la manivelle à coulisse, symétriques par rapport au diamètre qui passe par la position initiale A_0 du bouton A, pour lesquelles sa vitesse angulaire est égale à ω.

Elles sont fournies par l'équation :

$$r^2 - ar\cos\alpha = r^2 - 2ar\cos\alpha + a^2,$$

de laquelle nous déduisons :

$$\cos\alpha = \frac{a}{r},$$

et correspondent par suite aux points A_1 et A_3.

β) *Vitesse de glissement du coulisseau.* — Le bouton A considéré comme appartenant à la manivelle motrice OA a une vitesse ωr représentée par le vecteur (AP).

Comme nous pouvons le regarder comme la résultante du vecteur (AQ) perpendiculaire à la manivelle à coulisse et du vecteur (AS) dirigé suivant sa propre direction, nous en concluons que ce dernier vecteur représente la vitesse de glissement cherchée.

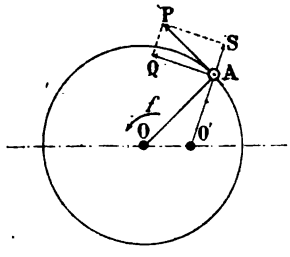


Fig. 254.

Son expression est donc :

$$V_g = \omega r\cos[90° - (\beta - \alpha)] = \omega r\sin(\beta - \alpha).$$

Transformation d'une rotation continue en une rotation alternative.

1° *Par quadrilatère articulé.*

195. — Tout quadrilatère articulé permettant de transformer une rotation continue en une rotation alternative doit avoir deux pivots à révolution complète situés aux extrémités de la manivelle motrice OA = R calée sur l'arbre moteur O. Elle coïncide par suite avec le plus petit côté du quadrilatère OAO'A' (fig. 255).

Pour fixer les idées, désignons par R, R', d et l ses quatre côtés et supposons qu'ils soient tels que :

$$R < R' < d < l.$$

Digitized by Google

Comme de plus le pivot O est à révolution complète, ils satisfont en outre à l'inégalité :

$$R + l < R' + d.$$

α) *Étude du mouvement du bouton* A'. — Recherchons tout d'abord les points extrêmes de la course de ce bouton et figurons, en OAO'A' la position occupée par le quadrilatère à l'époque t. Puisque le triangle OAA' existe, son côté OA' satisfait aux inégalités :

$$l - R < OA' < l + R.$$

Si donc, du point O comme centre, avec des rayons respectivement égaux à $l + R$ et $l - R$, nous décrivons des arcs de circonférence, ils

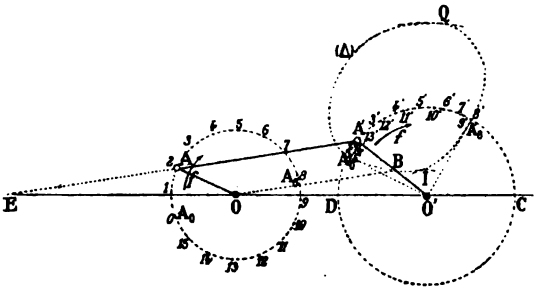


Fig. 255.

viennent couper la trajectoire du bouton A' aux points cherchés A'_0 et A'_8. Nous avons en effet :

$$l - R > d - R' = OD,$$
$$l + R < d + R' = OC.$$

Ceci posé, désignons par ω et ω' les vitesses angulaires des deux arbres. A l'instant considéré, elles sont liées par la relation :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{EO}{EO'}.$$

E désignant le point de rencontre de la bielle AA' avec la ligne des centres.

Comme d'autre part la parallèle OB menée à la bielle par le point O détermine deux triangles semblables O'OB, O'EA', nous pouvons écrire :

$$\frac{EO}{EO'} = \frac{BA'}{O'A'}.$$

Par suite :

$$\omega' = \omega \times \frac{BA'}{O'A'}.$$

Digitized by Google

Ou bien encore en désignant par V′ la vitesse du bouton A′ :

$$V' = \omega' \times O'A' = \omega \times O'A' \times \frac{BA'}{O'A'} = \omega \times BA'.$$

En supposant ω constant, la vitesse du bouton A′ est donc proportionnelle au segment BA′ et comme nous pouvons le construire pour chaque position du mécanisme en répétant la construction précédente, la courbe (Δ) lieu des points B aura la forme indiquée sur la figure 255. Comme d'autre part nous pouvons décrire du point O′ comme centre

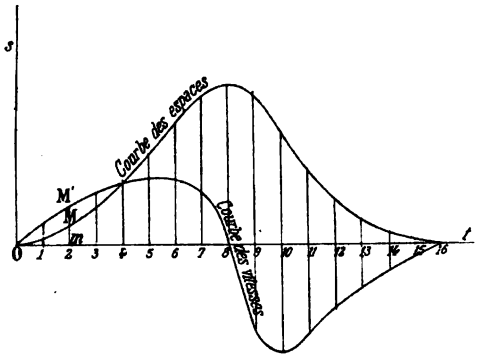


Fig. 256.

deux circonférences qui lui sont tangentes, les rayons O′I et O′Q des points de contact correspondent aux positions de la manivelle O′A′ pour lesquelles la vitesse du bouton A′ est maximum ; la première est relative au mouvement direct, la seconde au mouvement rétrograde.

Il résulte de cette étude que le mouvement du bouton A′ est direct varié accéléré jusqu'au moment où la manivelle O′A′ prend la position O′I, puis ensuite retardé ; après quoi il devient rétrograde : accéléré jusqu'au moment où la manivelle O′A′ prend la position O′Q ; retardé ensuite.

β) *Courbes des espaces et des vitesses du mouvement du bouton* A′. — Les droites OA'_0 et OA'_8 venant couper la circonférence trajectoire du bouton A en des points A_0 et A_8 satisfaisant aux relations :

$$A_0A'_0 = OA'_0 + R = l - R + R = l,$$
$$A_8A'_8 = OA'_8 - R = l + R - R = l;$$

lorsque le bouton A occupe les positions A_0 et A_8, le bouton A′ se trouve en A'_0 et A'_8.

Pour fixer les idées, supposons que le mouvement commence lorsque le bouton A se trouve en A_0. Supposons aussi que le sens de la flèche *f*′ réponde au sens positif sur la trajectoire du bouton A′. Si alors nous

Digitized by Google

déterminons les points M et M′ dont les coordonnées, par rapport aux axes Ot, Os, sont :

$$Om = \widehat{A_0A}, \quad mM = \widehat{A'_0A'},$$
$$Om = \widehat{A_0A}, \quad mM' = A'B,$$

nous aurons deux points appartenant : le premier à la courbe des espaces ; le second à celle des vitesses, et si nous répétons un certain nombre de fois cette construction, en joignant d'une part tous les points M obtenus, d'autre part tous les points M′, nous obtiendrons ces courbes elles-mêmes.

2° *Par la liaison d'une manivelle à bouton et d'une manivelle à coulisse.*

196. — Nous pouvons encore, comme l'indique la figure 257, réaliser la transformation précédente par la liaison d'une manivelle à bouton et d'une manivelle à coulisse.

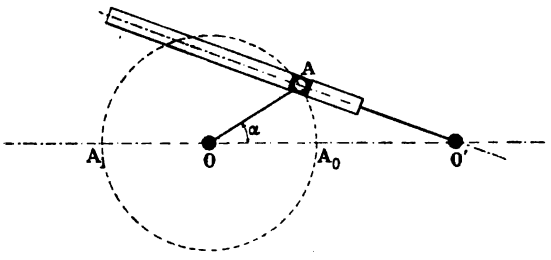


Fig. 257.

En conservant les notations du § 194, nous pouvons écrire :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{r(r - a\cos\alpha)}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha}.$$

α variant de 0 à 180°, le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ tout d'abord négatif, s'annule pour :

$$\cos\alpha = \frac{r}{a},$$

puisque $a > r$; après quoi il devient positif.

Pendant que le bouton A parcourt l'arc $\widehat{A_0AA_1}$ la coulisse tourne donc

Digitized by Google

tout d'abord en sens inverse de la manivelle motrice d'un mouvement varié retardé jusqu'au moment où les deux organes sont rectangulaires, ensuite dans le même sens d'un mouvement varié accéléré. Son mouvement est d'ailleurs symétrique par rapport à la droite OO'.

Cas particuliers. — *a)* Supposons que le centre O de la manivelle à bouton soit rejeté à l'infini sur la ligne OO', la trajectoire du bouton A devient alors une droite XX' perpendiculaire à OO' et le mécanisme obtenu (fig. 258) permet de transformer un mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne alternatif.

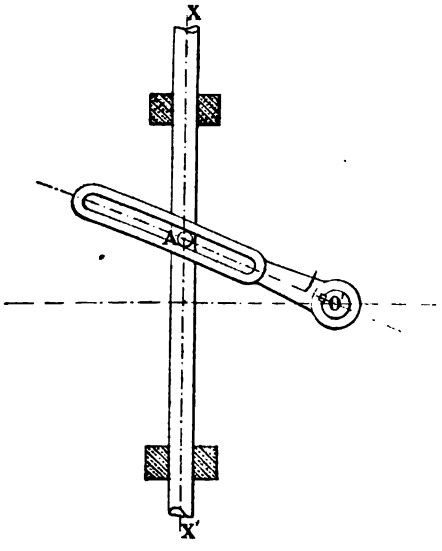


Fig. 258.

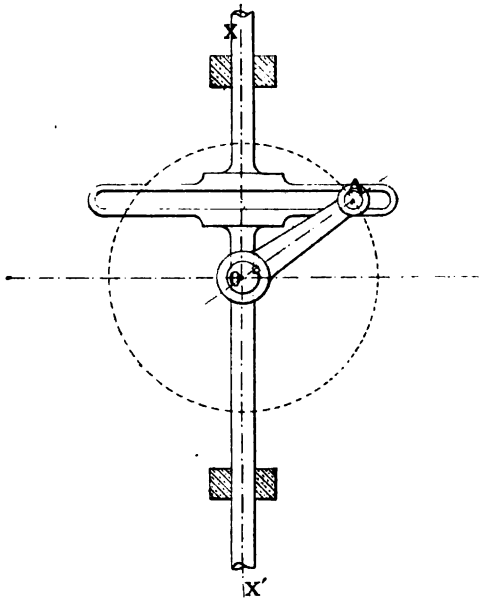


Fig. 259.

b) Si nous supposons au contraire que le centre O de la manivelle à bouton reste fixe et que celui de la manivelle à coulisse soit rejeté à l'infini sur la droite OO', cette dernière passant constamment par un point fixe à l'infini, se déplace parallèlement à elle-même et le mécanisme obtenu (fig. 259) permet de transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif.

TRANSFORMATION D'UNE ROTATION ALTERNATIVE EN UNE ROTATION ALTERNATIVE.

196. — Sur les arbres O et O' perpendiculaires au plan de la figure 260, calons deux manivelles OA, O'A', articulées aux extrémités d'une bielle

Digitized by Google

AA′ et choisissons leurs longueurs de telle façon que les pivots O et O′ du quadrilatère OAO′A′ ne soient pas à révolution complète. Pour fixer les idées, supposons que le pont $OO' = d$ soit le plus grand de ses côtés, la bielle $AA' = l$ le plus petit et que la longueur commune R des deux manivelles satisfasse à la relation suivante :

$$d + l > 2R \qquad (1)$$

α) *Positions limites des boutons* A *et* A′. — Pour que le bouton A′ puisse occuper une position quelconque A'_2, il faut que le triangle $OA_2A'_2$ existe, c'est-à-dire qu'on ait :

$$R - l < OA'_2 < R + l.$$

Or, de l'inégalité (1) nous déduisons :

$$R - l < d - R$$

et nous avons aussi :

$$R + l < d + R.$$

Si donc, du point O comme centre, avec des rayons respectivement égaux à $R - l$ et $R + l$, nous décrivons des arcs de circonférence, nous voyons que le premier ne coupe pas la circonférence O′A′, tandis que le second la rencontre aux points A'_3 et A'_7 qui coïncident avec les extré-

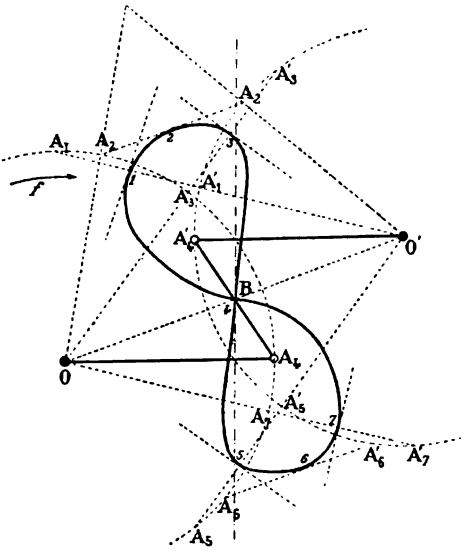


Fig. 260.

mités de la course du bouton A′. Par analogie, les points A_1 et A_5 de la circonférence O, situés à la distance $R + l$ du point O′, sont les extrémités de la course du bouton A.

Digitized by Google

β) *Étude du mouvement du bouton* A′. — Celui de l'arbre O étant supposé uniforme, sur la ligne des centres OO′, convenons de regarder les segments comme positifs lorsque leur sens est celui de O vers O′ et comme négatifs dans le cas contraire ; convenons aussi de regarder les vitesses angulaires comme positives lorsque les rotations se font dans le sens de la flèche *f*, par exemple, et comme négatives dans le cas contraire. Nous pouvons alors écrire, ω et ω′ désignant les vitesses angulaires des deux arbres à l'époque considérée :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\overline{BO}}{\overline{BO'}}.$$

ou :

$$\omega' = \omega \times \frac{\overline{BO}}{\overline{BO'}}.$$

L'étude du mouvement du bouton A′ se ramène donc à celle des variations du rapport $\frac{\overline{BO}}{\overline{BO'}}$ lorsque le bouton A de la manivelle motrice parcourt l'arc $A_1A_3A_5A_7A_1$; nous les avons résumées dans le tableau suivant :

POSITIONS du BOUTON A	POSITIONS du BOUTON A′	POSITIONS du POINT B	VALEURS du RAPPORT $\frac{\overline{BO}}{\overline{BO'}}$	VALEURS DE ω′	SENS DE ROTATION de L'ARBRE O′
					Les deux manivelles tournent :
A_1	A'_1	O′	$+\infty$	$+\infty$	
		à droite de O′	+		
		à l'infini à droite			dans le même sens
A_2	A'_2		1	ω	
		à l'infini à gauche			
A_3	A'_3	O	0	0	
			−		
A_4	A'_4	B	−1	$-\omega$	en sens inverse
			$-\infty$	$-\infty$	
A_5	A'_5	O′			
			$+\infty$	$+\infty$	
		à l'infini à droite			dans le même sens
A_6	A'_6		+1	ω	
		à l'infini à gauche			
A_7	A'_7	O	0	0	
			−		
A_8	A'_8	B	−1	$-\omega$	en sens inverse
A_1	A'_1	O′	$-\infty$	$\omega' = -\infty$	

En pratique ce mécanisme est employé pour le guidage en ligne droite ; toutefois comme on n'admet pas de vitesses angulaires infinies, on n'utilise qu'une partie de l'oscillation des manivelles.

Digitized by Google

γ) *Trajectoire du milieu* B *de la bielle.* — La bielle constituant un système invariable plan qui se déplace dans son plan, le centre instantané de rotation qui correspond à une quelconque de ses positions se trouve à la rencontre des deux manivelles. En appliquant le théorème de Chasles, nous pouvons donc obtenir autant de tangentes que nous voulons à la courbe lieu du point B. Sur la figure 260 nous avons tracé celles qui correspondent aux points de contact 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

La courbe ainsi déterminée, symétrique par rapport à la droite OO', a la forme d'un huit et porte le nom de *courbe à longue inflexion*. Elle présente au point 4 un premier point d'inflexion et deux autres sur la banche 3, 4, 5, dont la courbure peu prononcée permet de la confondre sur une certaine étendue avec une ligne droite.

2° *Par systèmes articulés gauches ou joints.*

197. Joint universel.

Le joint universel est un mécanisme qui permet de transformer un mouvement de rotation en un autre concourant avec lui.

Il se compose de deux fourchettes calées respectivement sur chacun des arbres de rotation et réunies, comme l'indique la figure 261, aux branches égales et rectangulaires AB et CD d'un croisillon. Le point de croisement de ces dernières coïncide avec le point de concours O des axes OX et OY et l'une d'elles se trouve perpendiculaire à la fois à l'autre branche et à l'arbre de rotation qui lui correspond.

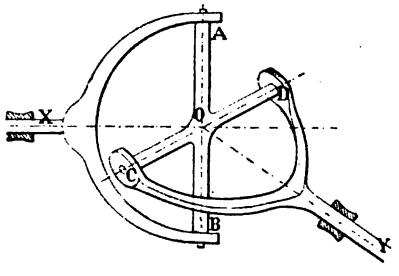


Fig. 261.

Si donc, l'arbre moteur OX se met en mouvement, il entraîne avec lui la branche AB du croisillon, l'autre branche CD qui lui est invariablement liée et cette dernière communique à son tour son mouvement à l'arbre OY à conduire.

α) **Étude du mouvement de l'arbre** OY. — Prenons pour plan de la feuille de papier celui des deux axes OX et OY et communiquons au premier son mouvement de rotation. Les extrémités A, B, C, D, des branches du croisillon, toujours situées à la même distance du point O, se déplacent alors sur une sphère de centre O et de rayon OA et tracent sur elle des grands cercles dont les plans sont respectivement perpendiculaires aux axes précités ; leur droite d'intersection CD, perpendicu-

Digitized by Google

laire au plan XOY, coïncide donc avec la position qu'occupe la seconde branche du croisillon, lorsque la première se trouve en AB.

Ceci posé, prenons pour origine du temps l'instant où le mécanisme occupe la position indiquée sur la figure 262. Au bout du temps t les extrémités A et C des branches du croisillon ont parcouru par exemple les chemins $\widehat{AA'} = x$, $CC' = y$ et comme l'arc de grand cercle CC', vaut toujours un quadrant, la position du point C' est déterminée dès que celle du point A' est connue. Il existe donc entre x et y une certaine relation à laquelle nous parvenons en considérant le triangle sphérique A'CC'. En supposant le rayon de la sphère OA égal à l'unité, ses côtés ont respectivement pour valeurs :

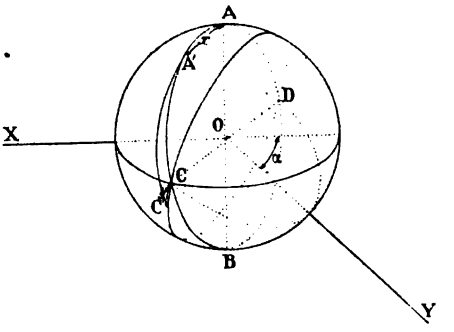


Fig. 262.

$$\widehat{CA'} = \frac{\pi}{2} - x, \qquad \widehat{CC'} = y, \qquad \widehat{A'C'} = \frac{\pi}{2}$$

et son angle $\widehat{A'CC'}$ vaut $180° - \alpha$ si nous désignons par α l'angle XOY. Nous pouvons alors poser l'équation :

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y \cos(180° - \alpha).$$

Simplifiée elle devient :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \,.\, \cos\alpha. \qquad (1)$$

Si nous désignons alors par ω et ω' les vitesses angulaires des arbres de rotation à l'époque considérée, en combinant les définitions de la vitesse angulaire et de la vitesse linéaire d'un point en mouvement de rotation, nous pouvons poser :

$$\omega = \frac{dx}{dt}, \qquad \omega' = \frac{dy}{dt}.$$

Par suite :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{dy}{dx}.$$

Pour obtenir l'expression du rapport $\frac{dy}{dx}$, différentions l'équation (1); nous obtenons alors :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\cos\alpha}$$

Digitized by Google

ou, en remplaçant $\cos^2 y$ par $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$ et remarquant que $\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos \alpha}$,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos^2 x \sin^2 \alpha}.$$

$\cos^2 x$ repassant par les mêmes valeurs dans le même sens lorsque l'arc x a varié de π, il nous suffit de faire varier cet arc de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$ pour obtenir les variations du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$. Elles sont résumées dans le tableau suivant :

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\cos^2 x$	0		1		0
$1 - \cos^2 x \sin^2 \alpha$	1	décroît	$\cos^2 \alpha$	croît	1
$\frac{\omega'}{\omega}$	$\cos \alpha$	croît	$\frac{1}{\cos \alpha}$	décroît	$\cos \alpha$

Il en résulte qu'à partir de l'instant où la branche AB du croisillon est perpendiculaire au plan XOY, le mouvement de l'arbre à conduire est varié accéléré jusqu'à la fin du premier quart de tour, retardé ensuite jusqu'à la fin du deuxième quart et les mêmes phases se reproduisent ensuite dans le même ordre pendant toute la rotation. Ce mouvement correspond donc à un mouvement périodique de période $\frac{\pi}{\omega}$.

β) **Remarque.** — La différence $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$ des valeurs limites $\frac{1}{\cos \alpha}$ et $\cos \alpha$ de la vitesse de l'arbre à conduire est minimum pour $\alpha = 180°$ et maximum pour $\alpha = 90°$. Si donc nous réunissons par un joint universel deux arbres situés dans le prolongement l'un de l'autre, la vitesse angulaire de l'arbre moteur se transmet intégralement à l'arbre à conduire. Dans les ateliers, on utilise cette propriété en sectionnant en plusieurs parties un arbre d'une longueur considérable dont la direction serait faussée si on l'installait directement et en réunissant les différents tronçons par des joints universels.

En pratique, l'angle α ne dépasse pas 50°. Dans les cas où il atteint cette valeur ou une valeur plus grande, on peut assurer la transmission de mouvement au moyen du double joint de Hooke que nous décrirons dans la suite.

γ) **Construction de la courbe des espaces relative au mouvement de l'extrémité C de la branche OC du croisillon.** — Pour représenter la courbe des espaces du mouvement de l'extrémité C de la branche OC du croisillon, prenons pour plan vertical de projec-

Digitized by Google

tion un plan perpendiculaire à l'axe OX et pour plan horizontal un plan parallèle à celui des deux axes ; leur angle XOY = α se projette alors horizontalement en vraie grandeur (fig. 263).

La trajectoire de l'extrémité A de la branche OA étant une circonférence dont le plan est de front, se projette en vraie grandeur en $o'a'$ sur le plan vertical. Quant aux extrémités de la deuxième branche, elles se déplacent sur une circonférence de même rayon dont le plan PαQ′ perpendiculaire à l'axe (oy, $o'y'$) passe par le point ($o\,.\,o'$) ; sa projection verticale est donc une ellipse dont nous déterminons les axes en appliquant les règles établies à cet effet en géométrie descriptive.

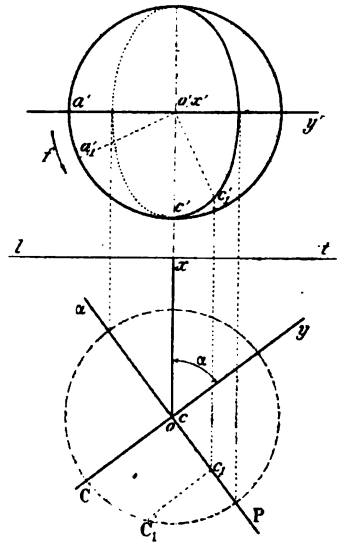


Fig. 263.

A l'origine du mouvement, les extrémités A et C des branches du croisillon étant projetées verticalement en a' et c', au bout du temps t elles occupent, par exemple, les positions a'_1 et c'_1 si l'angle $a'_1o'c'_1$ vaut un droit. Si donc le mouvement de rotation de l'arbre OX est uniforme, pour déterminer un point M de la courbe cherchée (fig. 264), il nous suffit de prendre son abscisse Om égale à la longueur de l'arc $\widehat{a'a'_1}$ et son ordonnée mM égale à la vraie grandeur CC_1 de l'arc (cc_1, $c'c'_1$) obtenue en rabattant le plan PαQ′ sur le plan horizontal qui contient le point ($o\,.\,o'$). En répétant cette construction un certain nombre de fois et joignant par un trait continu tous les points M obtenus, nous déterminons la courbe des espaces elle-même.

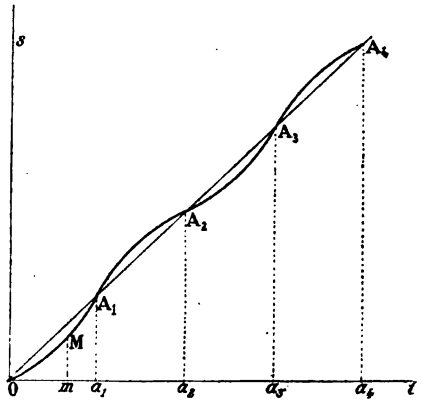


Fig. 264.

198. Double joint de Hooke.

Le mécanisme connu sous le nom de *double joint de Hooke* se réalise

Digitized by Google

comme suit : A partir du point de rencontre O des axes OX et OY de rotation (fig. 265), nous portons sur chacun d'eux deux longueurs égales OA et OB ; puis nous joignons AB et nous regardons le point A comme le point de croisement des branches d'un croisillon d'un premier joint universel qui permet de transformer le mouvement de rotation de l'arbre OX en un mouvement de rotation de l'arbre AB. Nous imaginons ensuite un second joint symétrique du premier par rapport au plan bissecteur OC de l'angle XOY et permettant de transformer le mouvement de rotation de l'arbre AB en un mouvement de rotation de l'arbre OY. L'ensemble de ces deux joints invariablement liés l'un à l'autre constitue le double joint de Hooke, et comme nous pouvons toujours regarder l'arbre intermédiaire AB comme transmettant son mouvement, soit à l'arbre OX, soit à l'arbre OY, il en résulte qu'à chaque instant ces deux arbres tournent avec la même vitesse angulaire par suite de la symétrie signalée précédemment.

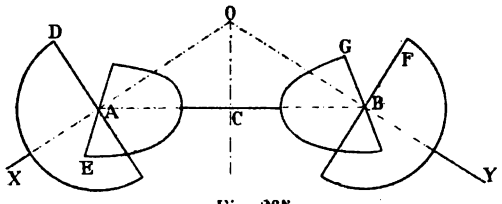


Fig. 265.

199. Joint de Cardan.

Plaçons-nous dans le cas particulier où OA = 0. Les deux branches AE et BG coïncident alors et si, pour empêcher les deux autres de se gêner dans leurs mouvements, nous les remplaçons par deux cercles métalliques dont le plus petit OC est réuni au plus grand OA par l'intermédiaire de deux pivots C et D situés aux extrémités d'un même diamètre CD, nous aurons réalisé le *joint de Cardan* (fig. 266).

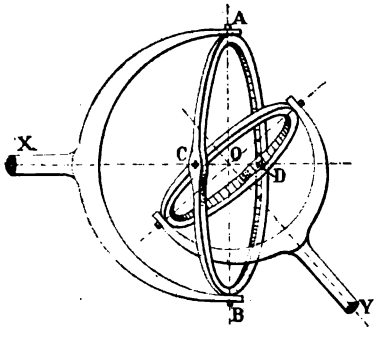


Fig. 266.

200. Joint Goubet.

Le joint Goubet a, sur le précédent, l'avantage de communiquer à l'arbre à conduire un mouvement de rotation identique à celui de l'arbre moteur et cela quel que soit leur angle.

Digitized by Google

Pour le réaliser (fig. 267), sur les deux arbres concourants OX et OY, prenons deux points A et B tels que OA = OB ; puis joignons AB. Considérons ensuite le point A comme le point de croisement des branches du croisillon d'un premier joint universel dont la seconde fourche coupe la droite AB en son milieu C et qui est invariablement lié à un second joint dont la disposition est symétrique de la précédente par rapport au plan perpendiculaire à la droite AB au point C.

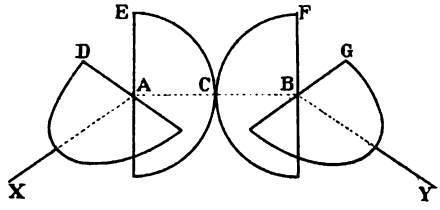


Fig. 267.

Un raisonnement analogue au précédent prouve que les deux arbres OX, OY, tournent à chaque instant avec la même vitesse angulaire quel que soit leur angle. Si donc, nous prenons l'arbre OX pour l'arbre de couche d'un navire, l'arbre OY pour arbre de son hélice, en déplaçant ce dernier, tout en conservant la symétrie du mécanisme par rapport au plan P, nous pouvons faire jouer à l'hélice le rôle de gouvernail et cela sans modifier sa vitesse angulaire.

Ce dispositif permettait à Goubet de faire mouvoir et de diriger à la fois le sous-marin pour lequel il l'avait construit.

201. Joint Clemens.

Le joint Clemens permet lui aussi de transmettre un mouvement de rotation d'un arbre IX à un arbre IY concourant avec lui.

Comme l'indique la figure 268, les manchons M et M', clavetés sur les arbres de rotation, portent des tourillons O et O' sur lesquels viennent s'articuler les bras d'un losange OAA'O' ; l'une de ses diagonales OO' est fixe et l'autre est constamment bissectrice de l'angle des axes. Les deux bras OA et O'A sont réunis l'un à l'autre par l'intermédiaire d'une enveloppe sphérique qui termine le bras OA et qui vient s'engager dans une sphère creuse terminant le bras O'A; L'ensemble de ces deux sphères constitue un joint à rotule et la réunion des deux autres bras s'obtient par un procédé analogue.

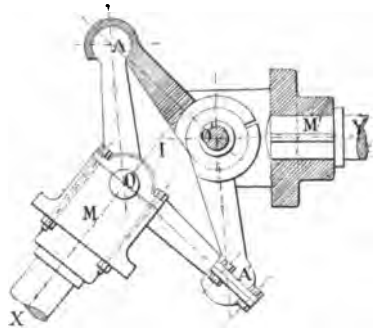


Fig. 268.

Digitized by Google

Pour toute position du mécanisme, la diagonale OO′ étant fixe, l'autre AA′ se meut dans le plan P qui lui est perpendiculaire en son milieu. La rotation de l'arbre OX entraîne donc tout d'abord celle des bras OA et OA′, ensuite celle des deux autres O′A et O′A′ et se transmet ainsi intégralement à l'arbre OY à conduire par suite de la symétrie du mécanisme par rapport au plan P.

202. Joint d'Oldham.

Le joint d'Oldham, employé seulement dans le cas d'appareils légers, permet de transformer un mouvement de rotation continue d'un arbre OX, en un mouvement de rotation continue d'un arbre O′Y parallèle au premier.

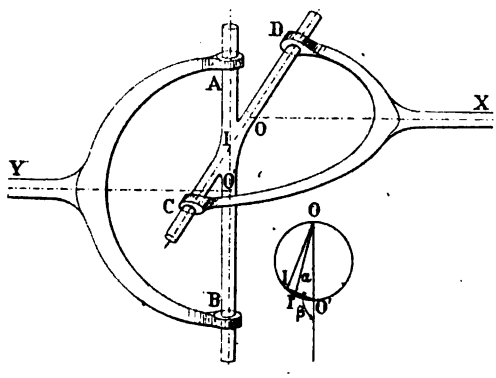


Fig. 269.

Il est formé de deux fourchettes liées invariablement aux arbres de rotation et dont les extrémités percées d'œilletons livrent passage aux branches rectangulaires AB et CD d'un croisillon. Comme l'indique la figure 269, ces dernières, pour assurer la transmission de mouvement, doivent pouvoir glisser suivant leurs propres directions.

a) *Étude du mouvement de l'arbre à conduire.* — Pour plan de la figure, prenons celui des axes OX et OY et désignons par O et O′ leurs points de rencontre avec les branches correspondantes du croisillon. La première passant constamment par le point fixe O, la deuxième par le point fixe O′, le lieu de leur point de rencontre I est une circonférence décrite sur OO′ comme diamètre. Si donc nous prenons un nouveau plan de figure perpendiculaire aux arbres eux-mêmes, et si nous figurons en OI la position occupée par la première branche à l'époque t, celle occupée par la seconde sera en O′I.

Ceci posé, désignons par α et β leurs angles avec la droite OO′. Leurs vitesses angulaires ont alors pour expressions :

$$\frac{d\alpha}{dt}, \qquad \frac{d\beta}{dt},$$

et comme la considération du triangle rectangle OO′I fournit la relation :

$$\beta = \alpha + 90°,$$

Digitized by Google

de laquelle nous déduisons :

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt},$$

il en résulte que *les deux arbres de rotation ont à chaque instant la même vitesse angulaire*. Pour cette raison le joint d'Oldham devrait appartenir au premier genre et à la première classe de la classification Willis. Si nous en avons exposé ici la théorie, c'est afin de ne pas le séparer des autres joints.

b) *Expressions des vitesses de glissement des branches du croisillon.* — Si pendant le temps dt qui suit l'époque t, la branche OI a tourné de l'angle $\widehat{IOI'}$, l'autre branche est venue occuper la position O'I' ; en sorte qu'elles ont glissé suivant leurs propres directions, la première de O vers I, la seconde de I vers O'.

Ceci posé, désignons par l et l' les longueurs des segments OI et O'I et considérons le triangle rectangle OO'I ; il nous donne

$$l = d\cos\alpha,$$
$$l' = d\sin\alpha.$$

Les vitesses de glissement cherchées ont donc pour expressions :

$$v_g = \frac{dl}{dt} = -d\omega\sin\alpha$$

$$v_g' = \frac{dl'}{dt} = d\omega\cos\alpha.$$

Elles sont de signes contraires, ce que nous savions déjà et de plus comme :

$$v_g^2 + v_g'^2 = d^2\omega^2$$

la *somme de leurs carrés est constante toutes les fois que l'arbre moteur tourne d'un mouvement uniforme.*

Digitized by Google

TROISIÈME CLASSE

APPAREILS OÙ LE SENS DE LA TRANSMISSION EST PÉRIODIQUEMENT VARIABLE ET OÙ LE RAPPORT DE LEURS VITESSES EST CONSTANT OU VARIABLE.

—

CHAPITRE V

—

LIAISON D'UNE ROTATION ET D'UNE TRANSLATION

203. Engrenage de Lahire. — L'*engrenage de Lahire*, décrit § 118, fournit un premier procédé pour transformer un mouvement de rotation continue en un mouvement rectiligne alternatif. Le système bielle et manivelle en fournit un second.

204. Système articulé bielle et manivelle. — Le système articulé bielle et manivelle est constitué par une manivelle OA calée sur

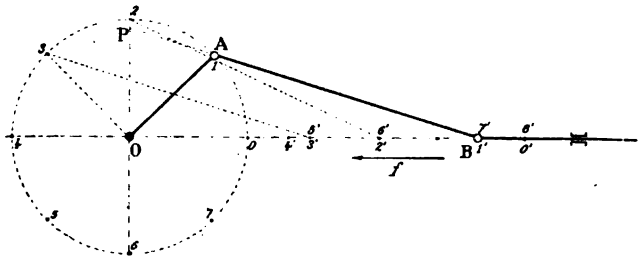


Fig. 270.

l'arbre moteur et articulée à l'une des extrémités A d'une bielle AB invariablement liée, comme l'indique la figure 270, à la tige guidée à laquelle on désire communiquer un mouvement rectiligne alternatif.

a) Étude du mouvement de la tige. — Nous avons établi en cinéma-

Digitized by Google

tique théorique, qu'à l'instant t, où la bielle occupe, par exemple, la position AB, la vitesse de la tige du piston avait pour expression :

$$V = \omega \times OP.$$

Si alors, nous supposons le mouvement de l'arbre moteur uniforme, et si nous adoptons sur la direction du mouvement rectiligne le sens de la flèche f comme sens positif, le mouvement de la tige est tout d'abord direct accéléré jusqu'au moment où la tige occupe une position intermédiaire entre celle où elle est perpendiculaire à la bielle et celle où elle est perpendiculaire à la direction du mouvement rectiligne, retardé ensuite jusqu'à la fin du premier demi-tour de la manivelle motrice ; puis il devient rétrograde avec des phases identiques à celles que nous venons de rencontrer et cela jusqu'à la fin du premier tour de l'arbre moteur.

b) Points morts. — L'étude des points morts du mécanisme a été faite § 191.

c) Recherche des courbes des espaces et des vitesses du mouvement de la tige. — α) *Courbe des espaces.* — Divisons la circonférence trajectoire du bouton A en huit parties égales et numérotons 0, 1, 2, 3, 4, ... les points de division obtenus ; puis de chacun d'eux comme centres, avec la

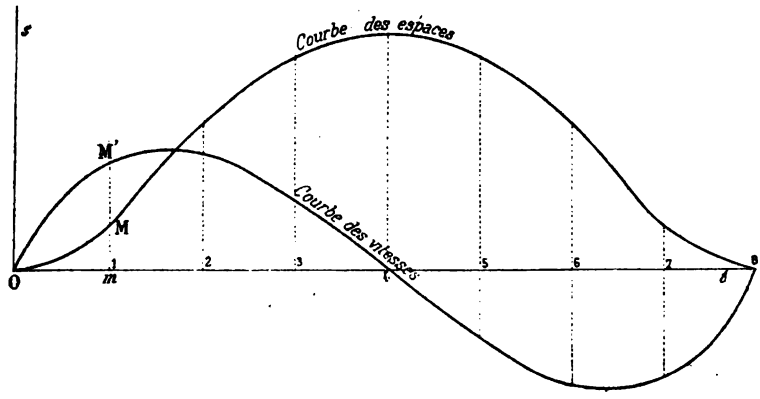


Fig. 271.

longueur de la bielle pour rayon, décrivons des arcs de circonférence et prenons leurs points de rencontre 0′, 1′, 2′, 3′, 4′, ... avec l'axe du mouvement rectiligne. A la position AB de la bielle (figure 271), nous pouvons alors faire correspondre un point M de la courbe des espaces qui a pour coordonnées, par rapport aux axes Ot, Os :

$$Om = \widehat{0.2}, \qquad mM = \overline{0'.1'}.$$

Digitized by Google

Le lieu des points M obtenus en répétant un certain nombre de fois cette construction correspond à cette courbe elle-même.

β) *Courbe des vitesses.* — En faisant de même correspondre à la vitesse de la tige de piston, pour l'époque considérée, une ordonnée mM' de même longueur que le segment OP, nous obtenons facilement la courbe des vitesses de son mouvement.

d) Recherche pratique du mouvement de la tige. — Pratiquement, la longueur de la bielle est assez considérable pour qu'il soit impossible de déterminer les différentes positions du point B. On peut cependant tourner la difficulté en remarquant que le point A_1 (fig. 272), défini par la relation

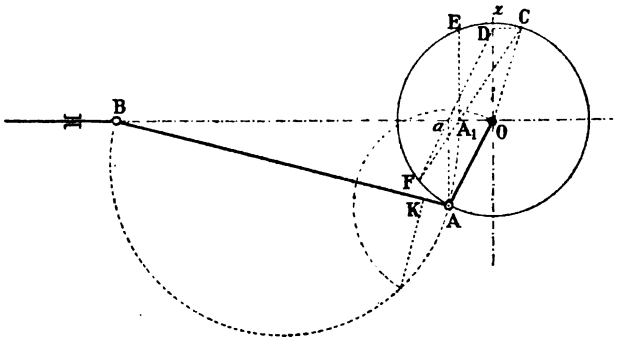


Fig. 272.

$BA_1 = l$, a un mouvement identique à celui de la tige du piston. Si donc nous pouvons l'obtenir à chaque instant, nous aurons par cela même les déplacements du point B.

Désignons à cet effet par r le rayon de la manivelle OA, par x la longueur aA_1 et considérons le triangle OAB, il donne :

$$l^2 = r^2 + \overline{OB}^2 - 2OB \times Oa,$$

ou bien encore :

$$l^2 = r^2 + (l + OA_1)^2 - 2(l + OA_1)(x + OA_1).$$

Développée cette équation conduit à la suivante :

$$r^2 - \overline{OA_1}^2 = 2x(l + OA_1).$$

De laquelle nous déduisons :

$$x = \frac{r^2 - \overline{OA_1}^2}{2(l + OA_1)}.$$

ou bien encore :

$$\frac{x}{\frac{r^2}{l}} = \frac{r^2 - \overline{OA_1}^2}{2r^2 + 2OA_1 \times \frac{r^2}{l}}. \qquad (1)$$

Digitized by Google

Ceci posé, parallèlement à la direction du mouvement rectiligne, construisons un segment de droite CD de longueur $\frac{r^2}{l}$ s'appuyant d'une part sur la circonférence trajectoire du bouton A, d'autre part sur le rayon Oz qui est perpendiculaire à celle du point B ; puis joignons les points D et a ainsi que les points C et A_1 et considérons le triangle OA_1C. Il donne :

$$\overline{A_1C}^2 = \overline{OA_1}^2 + r^2 + 2OA_1 \times \frac{r^2}{l}.$$

ou :

$$A_1C^2 - OA_1^2 = r^2 + 2OA_1 \times \frac{r^2}{l},$$

Il en résulte que l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{x}{\frac{r^2}{l}} = \frac{r^2 - \overline{OA_1}^2}{r^2 + \overline{A_1C}^2 - \overline{OA_1}^2} = \frac{r^2 - \overline{OA_1}^2}{A_1C^2 + A_1E^2},$$

et comme :

$$\overline{A_1E}^2 = FA_1 \times A_1C,$$

elle prend finalement la forme :

$$\frac{x}{\frac{r^2}{l}} = \frac{r^2 - \overline{OA_1}^2}{\overline{A_1C}^2 + FA_1 \times A_1C} = \frac{r^2 - \overline{OA_1}^2}{A_1C(A_1C + FA_1)} = \frac{FA_1}{FC},$$

et nous permet de conclure que les droites Da et CA_1 se coupent au point F sur la trajectoire du bouton A.

La position du point A_1 peut alors s'obtenir comme suit : Nous construisons, comme nous l'avons fait en AK, le segment $\frac{r^2}{l}$, puis nous le plaçons en CD comme nous l'avons indiqué précédemment ; nous joignons ensuite les points D et a et nous prenons le point de rencontre F de la droite obtenue avec la circonférence OA. La droite FC vient alors couper au point A_1 cherché la direction du mouvement rectiligne.

205. Excentrique circulaire à collier. — Dans la pratique, on réalise encore la transformation de mouvement précédente au moyen d'un excentrique circulaire à collier.

C'est un disque circulaire C(fig. 273), calé sur un arbre O ne coïncidant pas avec son axe de figure, dont le contour est creusé d'une gorge dans laquelle s'engagent les deux parties boulonnées d'un collier. L'une d'elles est invariablement liée à une barre AP appelée *barre d'excentrique* à

Digitized by Google

laquelle on articule en P la tige du piston et leur serrage est tel que le disque glisse sur le collier à frottement doux.

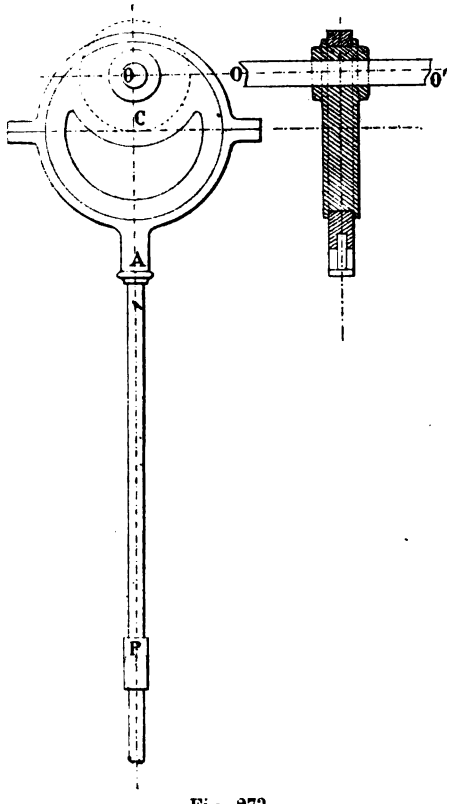


Fig. 273.

Le mouvement produit par ce mécanisme est analogue au précédent, car nous pouvons regarder le segment OC comme le rayon d'une manivelle articulée en C à la bielle CP dont la longueur reste constante puisque le système est invariable.

Cet excentrique produit toutefois un frottement considérable et a en plus le défaut de ne pas être réciproque.

206. Machine à cylindre oscillant. — Dans certaines machines à vapeur (fig. 274), la tige du piston est articulée directement à la manivelle et le cylindre peut osciller autour d'un axe passant par le point O′ et perpendiculaire au plan de la figure.

Étude du mouvement de la tige du piston. — Proposons-nous d'étudier le mouvement de la tige du piston en supposant uniforme celui de l'arbre moteur O.

A chaque instant, la vitesse $\omega \times OA$ du bouton A, représentée par le vecteur (AP) tangent à la circonférence OA, peut se décomposer en deux autres : l'une d'entraînement à laquelle correspond le vecteur (AQ) normal à la tige O′A du piston ; l'autre relative représentée par le vecteur (AR) perpendiculaire au précédent.

a) Étude du mouvement d'entraînement. — Pour obtenir, à l'instant considéré, l'expression de la vitesse d'entraînement (AQ), du pied O de l'arbre de rotation, menons la perpendiculaire OC à la tige du piston et considérons les deux triangles PAQ, AOC dont les côtés sont respectivement perpendiculaires et qui sont semblables. Ils donnent la relation :

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{OA},$$

Digitized by Google

de laquelle nous déduisons :

$$AQ = \omega \times AC.$$

Si donc nous convenons de regarder le segment (AC) comme négatif à l'intérieur des deux circonférences marquées sur la figure et comme positif dans le cas contraire, et si nous prenons pour position initiale du mécanisme celle figurée en traits mixtes, son mouvement, symétrique par rapport à la droite OO′ sera *varié, rétrograde retardé* jusqu'à ce que la tige du piston occupe la position O′A′, *direct accéléré* ensuite jusqu'à ce qu'elle vienne en coïncidence avec OO′.

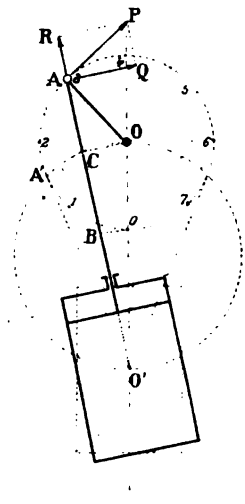


Fig. 274.

En faisant correspondre (fig. 275) à la position considérée du mécanisme un point M_2 dont les coordonnées, par rapport aux axes Ot, Os, sont :

$$Om = \widehat{0.3}, \qquad mM_2 = \overline{AC},$$

et en répétant cette construction un certain nombre de fois, puis joignant par un trait continu tous les points M_2 ainsi déterminés, nous obtenons la courbe des vitesses du mouvement d'entraînement du bouton A.

b) Étude du mouvement relatif. — A l'instant considéré la vitesse relative de la tige, représentée par le vecteur (AR), a pour expression :

$$V_r = \omega \times OC.$$

Elle varie donc proportionnellement à la longueur OC. Nulle tout d'abord, elle augmente et devient maximum pour la position O′A′ occupée par la tige ; puis elle diminue et redevient nulle lorsque le bouton A occupe sur sa trajectoire la position 4.

α) Courbes des espaces relatifs du bouton A. — Imaginons qu'à l'origine du temps, le bouton A se trouve dans la position 0 et qu'à l'époque t il occupe la position indiquée sur la figure.

Si la tige ne s'était pas déplacée suivant sa propre direction, à la même époque, le bouton A se trouverait au point B défini par la relation :

$$O'B = O'0$$

Le segment AB mesure donc son déplacement relatif pendant le temps t, et sur un graphique nous pouvons lui faire correspondre un point M_1 dont les coordonnées par rapport aux axes précédents sont :

$$Om = \widehat{0.3}, \qquad mM_1 = \overline{AB}.$$

Digitized by Google

En répétant cette construction un certain nombre de fois, et joignant par un trait continu tous les points M_1 ainsi déterminés, nous obtenons la courbe des espaces relatifs parcourus par la tige du piston.

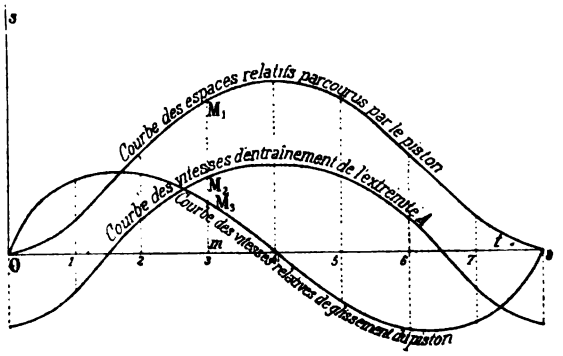


Fig. 275.

β) *Courbe des vitesses relatives du bouton* A. — En déterminant de même un point M_3 de coordonnées :

$$Om = \overset{\frown}{0.3}, \qquad mM_3 = \overline{OC},$$

et joignant tous les points M_3 obtenus pour chaque position du mécanisme, nous obtiendrons la courbe des vitesses relatives du bouton A.

Digitized by Google

CHAPITRE VI

—

MÉCANISMES A RETOUR RAPIDE

207. Bielle reliant deux manivelles égales. — Si nous reprenons le mécanisme étudié § 193, et si nous articulons aux extrémités A′ et B′ d'une bielle, d'une part la manivelle O′A′, d'autre part une tige guidée pouvant se déplacer seulement suivant la direction OO′, nous obtenons, comme nous allons l'établir, un mécanisme à *retour rapide*.

L'arbre moteur O tournant d'un mouvement uniforme, prenons l'un des points de rencontre 0′ de l'axe du mouvement rectiligne avec la

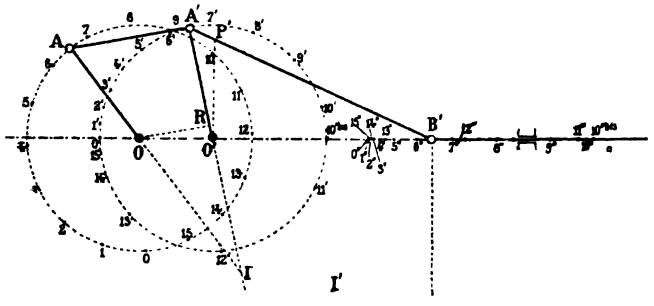


Fig. 276.

trajectoire du bouton A′ et cherchons la position correspondante 0 du bouton A ; puis, à partir de ce point, partageons la circonférence OA en seize parties égales, par exemple, numérotons 0, 1, 2, 3, 4, ... les points de division obtenus et déterminons-en 0′, 1′, 2′, 3′, 4′, ... ceux qui leur correspondent sur la circonférence O′A′. Enfin de ces derniers comme centres, avec la longueur de la bielle pour rayon, décrivons des arcs de circonférence et prenons leurs points de rencontre 0″, 1″, 2″, 3″, 4″, ..., avec l'axe du mouvement rectiligne. Nous obtenons ainsi les positions du point B de la tige du piston qui

Digitized by Google

correspondent à celles occupées par le bouton A pendant un tour de la manivelle motrice. En particulier quand le bouton A se trouve aux points 0 et 10bis, le point B′ est au commencement et à la fin de sa course : l'arc $\overset{\frown}{0.6.10^{bis}}$ de circonférence OA correspond donc au temps de la période active de l'outil ; l'arc $\overset{\frown}{0.12.10^{bis}}$ correspond, au contraire, à celui de son retour. Comme le premier est supérieur au second, la propriété du retour rapide est démontrée.

Recherche des courbes des espaces et des vitesses du mouvement de la tige du piston. — a) *Courbe des espaces.* —

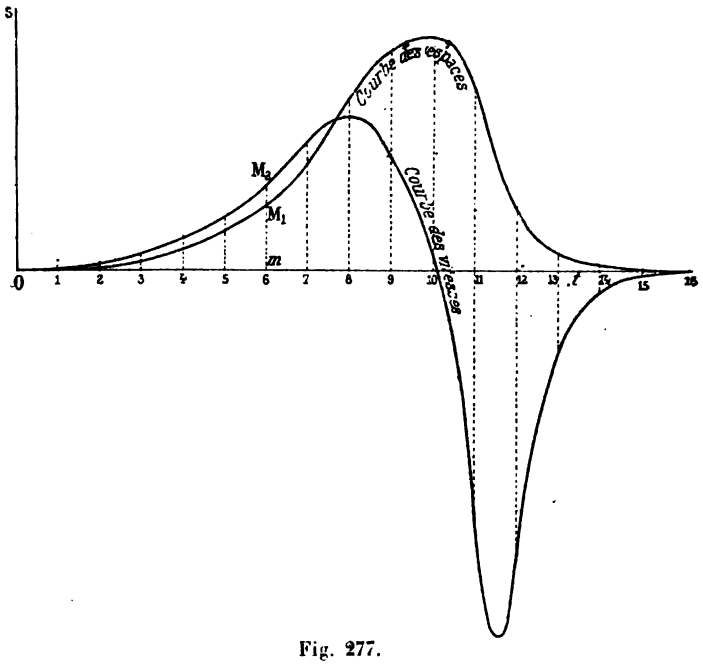


Fig. 277.

A la position occupée sur la figure précédente par le mécanisme, faisons correspondre sur la figure 277, le point M_1 dont les coordonnées, par rapport aux axes Ot et Os, sont :

$$Om = \overset{\frown}{0.6}, \qquad mM_1 = \overline{0''.6''}$$

et répétons cette construction un certain nombre de fois. La courbe lieu des points M_1 ainsi déterminés correspond à celle des espaces du mouvement de la tige.

b) *Courbe des vitesses.* — Pour obtenir la courbe des vitesses du même mouvement, désignons par V_A, $V_{A'}$, $V_{B'}$, les vitesses des points A, A′, B′, à l'époque considérée.

Digitized by Google

La bielle A'B' constituant un premier système invariable plan qui se déplace dans son plan et auquel correspond le centre instantané I' de rotation, nous pouvons écrire :

$$\frac{V_{B'}}{V_{A'}} = \frac{I'B'}{I'A'}.$$

La bielle AA' en constituant un second, nous obtenons pour la même raison la proportion :

$$\frac{V_{A'}}{V_A} = \frac{IA'}{IA}.$$

Le produit membre à membre de ces deux équations, nous conduit à la suivante :

$$\frac{V_{B'}}{V_A} = \frac{I'B' \times IA'}{I'A' \times IA}.$$

Or :

$$\frac{I'B'}{I'A'} = \frac{O'P'}{O'A'},$$

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{A'R}{OA}.$$

Par suite :

$$\frac{V_{B'}}{V_A} = \frac{O'P'}{O'A'} \times \frac{A'R}{OA},$$

ou :

$$V_{B'} = \omega \times OA \times \frac{O'P'}{O'A'} \times \frac{A'R}{OA} = \omega \times \frac{O'P' \times A'R}{O'A'}.$$

Si donc nous posons :

$$l = \frac{O'P' \times A'R}{O'A'},$$

la vitesse du point B' aura finalement pour expression :

$$V_{B'} = \omega \times l.$$

La longueur l étant une quatrième proportionnelle facile à construire à chaque instant, nous pouvons prendre ses valeurs respectives pour ordonnées de la courbe des vitesses et représenter cette dernière sur la figure 277.

208. Retour rapide au moyen du contre-parallélogramme. — Reportons-nous à l'étude du contre-parallélogramme faite § 193 et articulons (fig. 278) aux extrémités d'une bielle A'B', d'une part la manivelle O'A', d'autre part une tige de piston guidée suivant la direction B'C' ; nous obtenons un nouveau mécanisme qui permet de transformer le mouvement de rotation continue de l'arbre O en un mouvement rectiligne alternatif à retour rapide de la tige guidée B'C'.

Digitized by Google

Marquons, en effet, en 0′ et $4'^{bis}$ les points de rencontre de l'axe du mouvement rectiligne avec la trajectoire du bouton A′ ; puis, de chacun d'eux comme centres, décrivons des arcs de circonférence de rayon AA′ et marquons leurs points de rencontre 0 et 4bis avec la trajectoire du bouton A. Si alors nous supposons uniforme le mouvement de rotation de l'arbre O et si, pour représenter le temps d'une révolution complète de la manivelle motrice OA, nous prenons le développement de la circonférence OA, à l'arc $\overset{\frown}{0.4^{bis}}$, inférieur à une demi-circonférence, correspondra la durée du retour de la tige et à l'arc restant celui de la période de travail. Comme le premier est inférieur au second, nous avons bien là un mécanisme à retour rapide.

Recherche des courbes des espaces et des vitesses du mouvement de la tige B′C′. — a) *Courbe des espaces.* — Comme précédemment, après avoir divisé la circonférence OA en seize parties égales et déterminé les positions correspondantes du point d'articulation B′ de la tige du piston, nous pouvons, sur un graphique, faire correspondre, à la position de la figure, un point M_1 dont les coordonnées, par rapport aux axes Ot, Os, sont :

$$Om = \overset{\frown}{0.1}, \qquad mM_1 = \overset{\frown}{0'.1'}.$$

En répétant cette construction un certain nombre de fois et joignant par un trait continu tous les points M_1 ainsi déterminés, nous obtenons la courbe des espaces du mouvement cherché.

b) *Courbe des vitesses.* — A l'époque considérée, désignons par V_A, $V_{A'}$, $V_{B'}$, les vitesses des points A, A′ et B. La bielle A′B′ constituant un premier système invariable plan qui se déplace dans son plan auquel correspond le centre instantané I′ de rotation, nous pouvons écrire :

$$\frac{V_{B'}}{V_{A'}} = \frac{I'B'}{I'A'}.$$

En envisageant de la même façon la bielle AA′, nous obtenons :

$$\frac{V_{A'}}{V_A} = \frac{IA'}{IA},$$

si donc nous éliminons entre ces deux équations la quantité $V_{A'}$, nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{V_{B'}}{V_A} = \frac{I'B'}{I'A'} \times \frac{IA'}{IA} = \frac{O'P}{O'A'} \times \frac{O'A'}{AB} = \frac{O'P}{AB},$$

P désignant le point de rencontre de la bielle A′B′ avec la ligne des centres OO′.

Digitized by Google

Nous en déduisons :

$$V_{B'} = \omega \times OA \times \frac{O'P}{AB}.$$

Si alors, nous posons :

$$l = OA \times \frac{O'P}{AB},$$

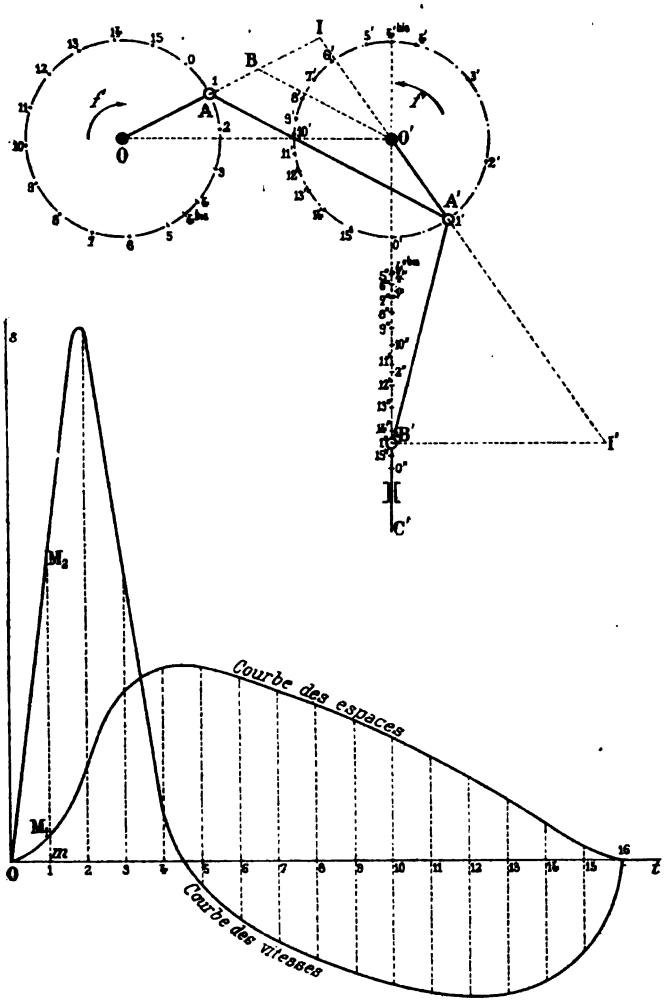


Fig. 278.

la vitesse du point B' a finalement pour expression :

$$V_{B'} = \omega \times l.$$

La longueur l étant une quatrième proportionnelle facile à obtenir à

Digitized by Google

chaque instant, nous pouvons prendre ses valeurs respectives pour ordonnées de la courbe des vitesses du mouvement de la tige du piston et tracer cette dernière comme l'indique la figure 278.

209. Mécanisme à retour rapide appliqué aux limeuses. — Si nous considérons le mécanisme étudié § 193, et si nous articulons (fig. 279) les extrémités d'une bielle BC, d'une part au point B de la coulisse O'A, d'autre part à un point C que nous supposons invariablement lié à un outil animé d'un mouvement rectiligne alternatif d'axe XX', nous obtenons, comme il est facile de le justifier, un mécanisme à retour rapide.

Partageons, en effet, à partir du point 0, la trajectoire du coulisseau A en seize parties égales et numérotons 0, 1, 2, 3, 4, ... les points de division obtenus ; puis menons les rayons O'.1, O'.2, O'.3, O'.4, ... et prenons leurs points de rencontre 0', 1', 2', 3', 4', ... avec la trajectoire du bouton B ; enfin de chacun d'eux comme centres, décrivons des arcs de circonférence de rayon BC et marquons en 0'', 1'', 2'', 3'', ... leurs points de rencontre avec l'axe du mouvement rectiligne.

Le mouvement de l'arbre O étant supposé uniforme à l'arc $\overset{\frown}{0.A.9^{bis}}$, nous pouvons faire correspondre la durée de la période active de l'outil et à l'arc $\overset{\frown}{9^{bis}.13.0}$ celui de sa période de retour. Comme le premier est supérieur au second, le mécanisme que nous venons d'obtenir est bien à retour rapide.

Recherche des courbes des espaces et des vitesses du mouvement de l'outil. — a) *Courbe des espaces.* — A la position occupée sur la figure 279 par le mécanisme, faisons correspondre sur le graphique un point M_1 dont les coordonnées par rapport aux axes Ot, Os sont :

$$Om = \overset{\frown}{0.1}, \qquad mM_1 = \overline{0''.1''},$$

puis répétons cette construction un certain nombre de fois. En joignant ensuite par un trait continu tous les points M_1 ainsi déterminés, nous obtenons la courbe des espaces du mouvement de la tige.

b) *Courbe des vitesses.* — La bielle BC constituant un premier système plan qui se déplace dans son plan auquel correspond un centre instantané I de rotation, nous pouvons écrire en conservant les notations du paragraphe précédent :

$$\frac{V_C}{V'_B} = \frac{IC}{IB}.$$

D'autre part, d'après la théorie des rotations, nous avons :

$$\frac{V'_B}{V'_A} = \frac{O'B}{O'A}.$$

Digitized by Google

En éliminant entre ces deux équations la quantité V'_B, nous sommes conduits à la relation suivante :

$$\frac{V_C}{V'_A} = \frac{IC}{IB} \times \frac{O'B}{O'A}.$$

Ceci posé, remarquons que la vitesse $V_A = \omega \times OA$ du coulisseau,

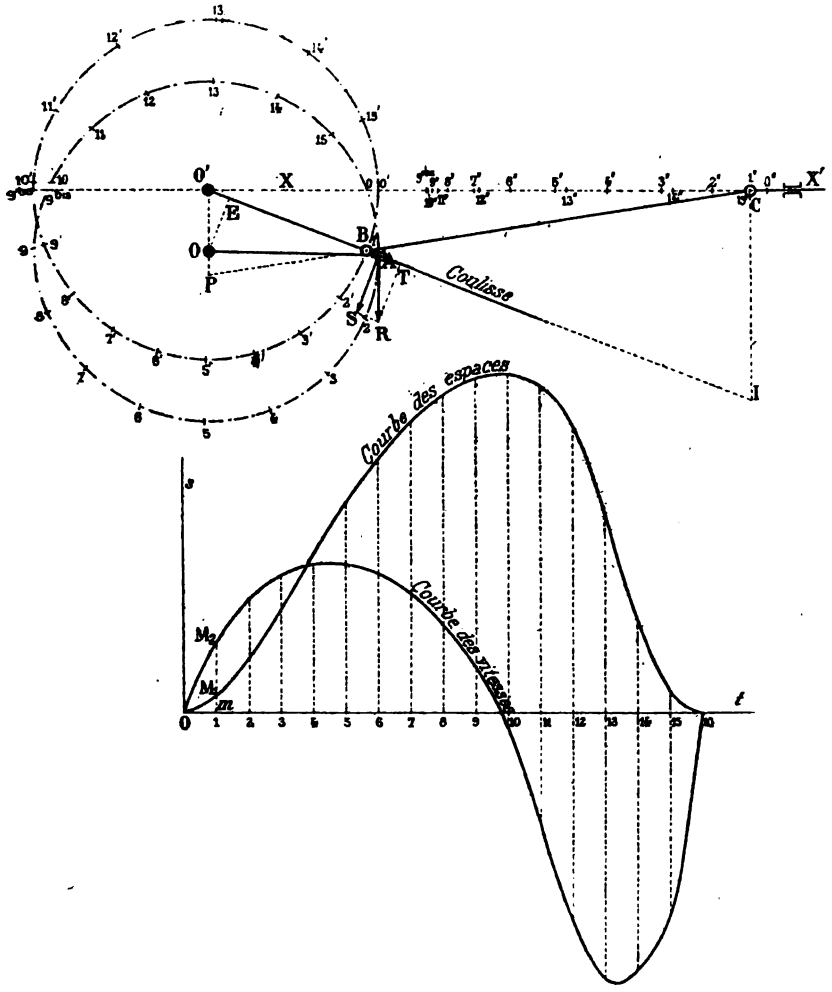


Fig. 279.

représentée par le vecteur (AR) perpendiculaire à OA, peut être décomposée en deux autres : l'une est représentée par le vecteur (AT) porté par OA ; l'autre V'_A, par le vecteur (AS) perpendiculaire à O'A, et a pour expression $\omega \times OA \times \cos \widehat{OBO'}$.

Digitized by Google

Par suite :

$$V_C = \omega \times OA \times \cos \widehat{OBO'} \times \frac{IC}{IB} \times \frac{O'B}{O'A},$$

ou :

$$V_C = \omega \times O'B \times \frac{OP \times AE}{O'A}.$$

Si alors nous posons :

$$l = \frac{OP \times AE}{O'A},$$

la vitesse du point C a finalement pour expression :

$$V_C = \omega \times O'B \times l.$$

Elle varie donc proportionnellement à la quatrième proportionnelle l que nous pouvons facilement construire à chaque instant. Nous pouvons alors prendre ses valeurs respectives pour ordonnées de la courbe des vitesses et tracer cette dernière comme l'indique la figure 279.

210. Retour rapide dans les machines à raboter. — Si nous nous reportons au mécanisme étudié au § 196 et si nous articulons (fig. 280) les extrémités d'une bielle BC, d'une part au point B de l'oscillateur O'A, d'autre part à l'extrémité C d'une tige guidée et assujettie à prendre un mouvement rectiligne alternatif d'axe XX', nous obtenons un mécanisme à retour rapide comme nous allons l'établir.

Les tangentes issues du point O' à la circonférence OA trajectoire du bouton A, correspondant aux positions extrêmes de la coulisse, l'arc $\widehat{0.1.9^{bis}}$ de circonférence OA correspond à la durée de la période active de l'outil, tandis que l'arc $\widehat{0.13.9^{bis}}$ correspond à celle du retour. Comme le premier est supérieur au second, la propriété du retour rapide attribuée précédemment au mécanisme se trouve justifiée.

Recherche des courbes des espaces et des vitesses du chariot. — a) *Courbe des espaces.* — Pour obtenir la courbe des espaces du mouvement de chariot, identique à celui du point C, nous divisons la circonférence OA en seize parties égales à partir de son point de contact 0 avec l'une des tangentes qui passe par le point O', et nous numérotons 0, 1, 2, 3, ... les points de division obtenus ; puis nous déterminons les positions correspondantes 0', 1', 2', 3', 4', ... de l'extrémité B de la coulisse et de chacune d'elles comme centre, avec la longueur de la bielle pour rayon, nous décrivons des arcs de circonférence qui viennent couper la trajectoire du point C en des points 0'', 1'', 2'', 3'', ...

Ceci posé, à la position occupée sur la figure par le mécanisme, fai-

Digitized by Google

sons correspondre sur un graphique le point M_1 dont les coordonnées par rapport aux axes Ot, Os sont :

$$Om = \widehat{0.3}, \qquad mM_1 = \overline{0''.3''},$$

et répétons un certain nombre de fois cette construction ; puis joignons

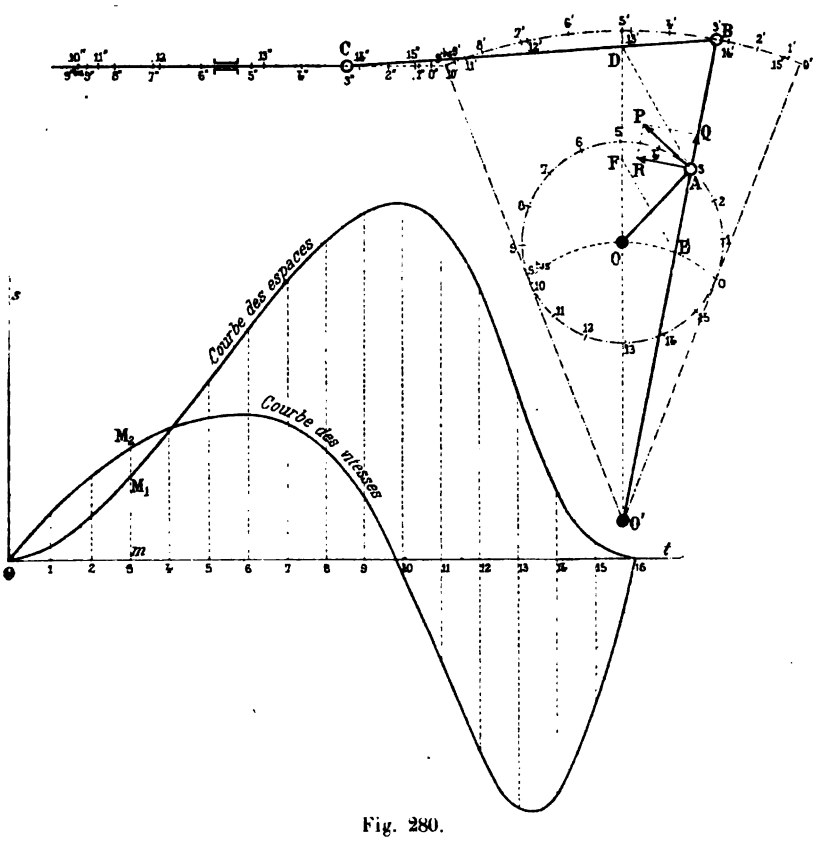


Fig. 280.

par un trait continu tous les points obtenus. La courbe que nous obtenons ainsi correspond à celle des espaces du mouvement du chariot.

b) *Courbe des vitesses.* — Pour obtenir la courbe des vitesses du même mouvement, remarquons que nous pouvons écrire :

$$\frac{V_C}{V_B} = \frac{O'D}{O'B}. \qquad (1)$$

Comme, d'autre part, nous pouvons décomposer le vecteur (AP), égal à $\omega \times OA$, en deux autres : l'un (AR) perpendiculaire à la coulisse et qui exprime la vitesse de rotation du bouton A autour de l'arbre

Digitized by Google

O′ ; l'autre (AQ) qui lui est perpendiculaire et qui exprime la vitesse de glissement de ce même bouton ; nous avons la relation :

$$\frac{V_B}{AR} = \frac{O'B}{O'A},$$

de laquelle nous déduisons :

$$V_B = AR \times \frac{O'B}{O'A}.$$

Cette valeur de V_B substituée dans l'équation (1) nous conduit à l'expression suivante pour V_C :

$$V_C = AR \times \frac{O'B}{O'A} \times \frac{O'D}{O'B} = AR \times \frac{O'D}{O'A}.$$

Et comme entre les segments de la figure nous avons la relation :

$$\frac{O'D}{O'A} = \frac{O'F}{O'E},$$

elle devient :

$$V_C = AR \times \frac{O'F}{O'E}.$$

Or, les deux triangles semblables APR, OAE donnent la proportion :

$$\frac{AR}{AP} = \frac{AE}{OA},$$

de laquelle nous déduisons :

$$AR = \omega \times OE \times \frac{AE}{OA} = \omega \times AE.$$

En sorte que la vitesse du chariot a pour expression finale :

$$V_C = \omega \times AE \times \frac{O'F}{O'E} = \omega \times DF.$$

Elle est donc proportionnelle à la longueur du segment DF que nous pouvons prendre à chaque instant pour ordonnée de la courbe des vitesses. Avec cette convention, nous avons tracé sur la figure 280 cette courbe elle-même.

211. Dispositif à retour rapide avec phases de repos aux deux extrémités de la course[1]. — Dans le dispositif représenté sur les figures 281 et 283, la glissière dans laquelle se meut le maneton présente deux parties circulaires concentriques à la circonférence décrite par l'axe du bouton ; leur longueur commune dépend de la durée qu'on s'impose pour la période du repos de l'outil. Dans le cas où son retour

1. Génie civil.

Digitized by Google

est rapide, les angles au centre qui correspondent à ces parties circulaires ne sont pas opposés par le sommet (fig. 281) ; ils le sont au contraire dans le cas où la période active de l'outil a même durée que la

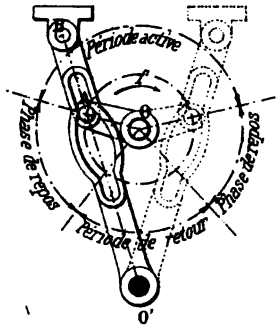


Fig. 281.

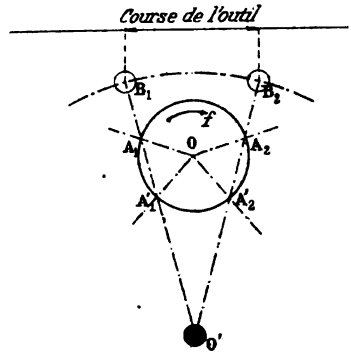


Fig. 282.

période de retour (fig. 283) et les deux mécanismes obtenus permettent de transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif avec phases de repos aux deux extrémités de la

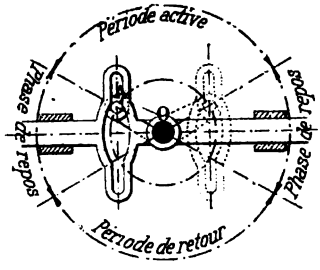


Fig. 283.

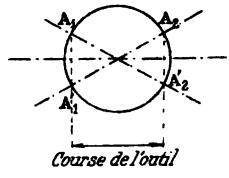


Fig. 284.

course. Toutefois pour éviter qu'à fin de course le chariot, dont la vitesse n'est pas nulle, ne continue à se déplacer en vertu de la vitesse acquise, on dispose un ressort qui l'oblige à l'immobilité dans ses positions extrêmes.

Digitized by Google

CHAPITRE VII

—

MANIVELLES MULTIPLES

212. — En pratique, on cale sur un arbre moteur autant de manivelles qu'il y a de mécanismes à actionner; leur ensemble constitue *une manivelle multiple* dont l'ordre de multiplicité correspond au nombre des mécanismes à mettre en mouvement.

Lorsqu'une manivelle produit un rendement pendant une course seulement, elle est dite *à simple effet* ; dans le cas contraire, elle est *à double effet.*

Il résulte de cette définition que la manivelle d'une pompe aspirante est à simple effet puisque l'eau ne jaillit que pendant l'une des courses du piston, tandis que celle d'une machine à vapeur est à double effet puisque la vapeur agit sur les deux faces du piston et le force à travailler pendant ses deux courses.

On appelle *travail d'une manivelle* son rendement effectif. Dans une pompe, par exemple, c'est le volume d'eau débité pendant un certain temps. Son expression étant :

$$V = \pi r^2 h,$$

r désignant le rayon du cylindre et h la hauteur dont s'est élevé le piston, la courbe que nous obtenons en portant en abcisses les temps et en ordonnées les travaux correspondants ou les quantités h qui leur sont proportionnelles, prend le nom de *courbe du travail de la manivelle* et plus elle se rapproche d'une droite, plus le travail de la manivelle est régulier.

En pratique, les constructeurs qui ont plusieurs manivelles à caler sur un même arbre cherchent toujours la disposition qui donne le moins de résistances ; elle correspond par suite au débit le plus régulier. Nous indiquerons la manière dont ils procèdent dans quelques cas particuliers.

Digitized by Google

213. Courbes du travail d'une manivelle simple marchant : 1° à simple effet ; 2° à double effet. — a) *La manivelle simple est à simple effet.* — Pour obtenir la courbe du travail d'une manivelle simple à simple effet, nous faisons correspondre à chaque position $OA_t B_t$

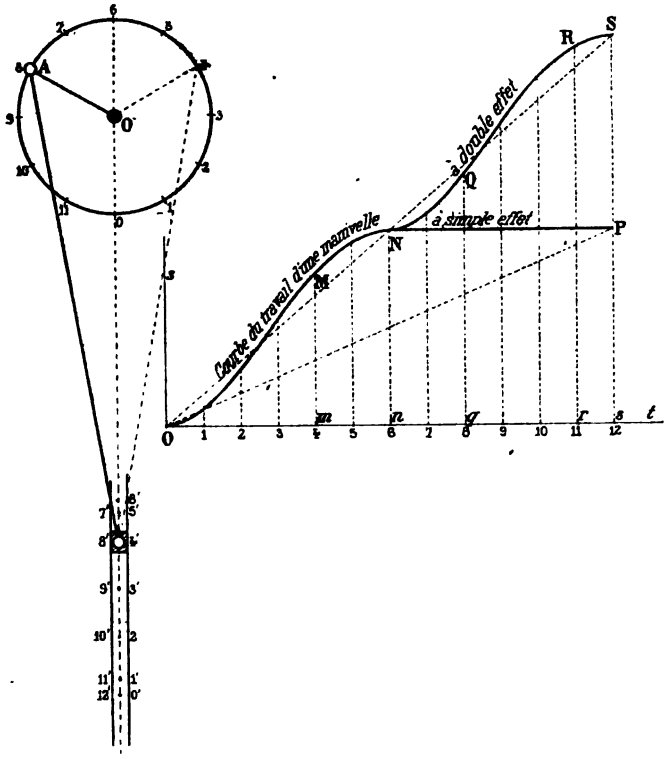


Fig. 285.

du mécanisme (fig. 285) un point M dont les coordonnées par rapport aux axes Ot, Os, sont :

$$Om = \widehat{0.4}, \qquad mM = 0'.4',$$

et nous joignons par un trait continu tous les points M ainsi déterminés. La courbe obtenue OMNP comprend un segment NP de droite parallèle à l'axe des temps ; il correspond à la durée de la seconde demi-révolution de la manivelle pendant laquelle le débit reste stationnaire. Comme elle s'éloigne beaucoup de la droite OP qui joint ses points extrêmes, nous pouvons conclure que le travail de la manivelle qui nous occupe est tout à fait irrégulier.

b) *La manivelle simple est à double effet.* — Avec la convention pré-

Digitized by Google

cédente, la courbe OMNQRS du travail d'une manivelle simple à double effet se compose de deux parties : l'une OMN obtenue précédemment ; l'autre NQRS, lieu des points Q qui ont pour coordonnées par rapport aux axes Ot, Os :

$$Oq = \overset{\frown}{0.6.8}, \qquad qQ = \pi OA + \overset{\frown}{6'.8'}.$$

Comparée à la droite OS qui joint ses extrémités, elle montre que le débit d'une manivelle simple à double effet n'est pas encore tout à fait régulier, mais qu'il l'est cependant beaucoup plus que dans le cas précédent.

214. Courbes du travail d'une manivelle double à simple

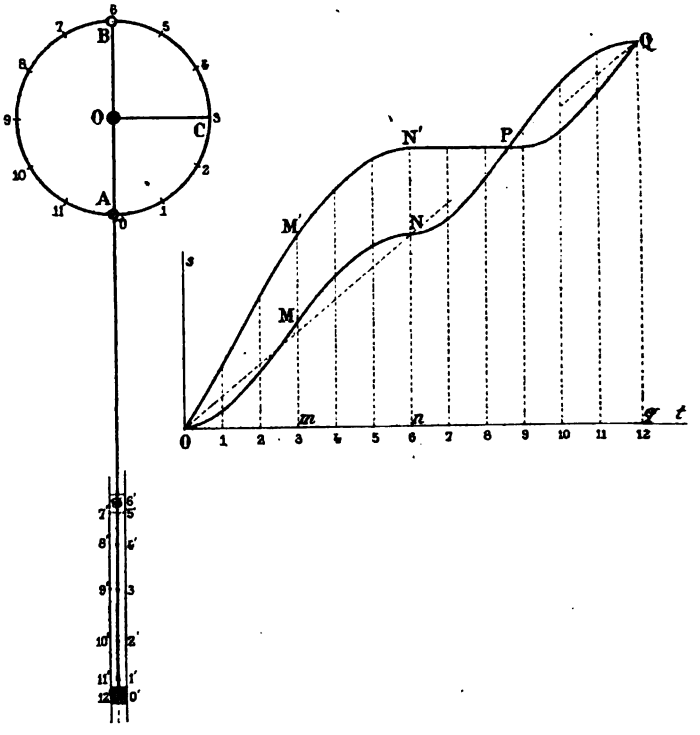


Fig. 286.

effet travaillant en montant. — Proposons-nous de construire la courbe du travail d'une manivelle double à simple effet travaillant en montant, dans les deux cas suivants :

a) *Les deux manivelles* OA, OB, *sont dans le prolongement l'une de l'autre.* — La première travaille seule pendant une demi-révolution

Digitized by Google

et la partie OMN de la courbe du débit qui lui correspond (fig. 286) est identique à celle du cas précédent. Après quoi, la manivelle OB travaille à son tour dans les mêmes conditions que la précédente et la seconde partie NPQ de la courbe du débit qui lui correspond occupe, par rapport à la parallèle l'axe à des temps menée par le point P, la même disposition que la première, par rapport à cet axe lui-même.

La courbe entière, comparée à celle du travail de la manivelle simple à double effet, montre que le débit de la manivelle double à simple effet est plus régulier que celui de la manivelle simple à double effet.

b) *Les deux manivelles sont à angle droit.* — La courbe OM'N'PQ du produit se compose dans ce cas :

1° D'un premier arc O'M' obtenu en joignant les points dont les ordonnées respectives valent :

$$\overline{0'.1'} + \overline{3'.4'}, \qquad \overline{0'.2'} + \overline{3'.5'}, \qquad \overline{0'.3'} + \overline{3'.6'}.$$

Il correspond au travail des deux manivelles OA et OC pendant le premier quart de tour de l'arbre moteur.

2° D'un second arc M'N' obtenu en joignant les points d'ordonnées :

$$m\mathrm{M}' + \overline{3'.4'}, \qquad m\mathrm{M}' + \overline{3'.5'}, \qquad m\mathrm{M}' + \overline{3'.6'}.$$

Il correspond au travail de la manivelle OA pendant le deuxième quart de tour du même arbre.

3° D'un segment N'P de droite qui correspond au troisième quart de tour de l'arbre moteur pendant la durée duquel le débit reste constant puisque aucune manivelle ne travaille.

4° Enfin d'un dernier arc PQ obtenu en joignant les points dont les ordonnées au-dessus de la droite N'P ont pour valeurs respectives :

$$\overline{0'.1'}, \qquad \overline{0'.2'}, \qquad \overline{0'.3'}.$$

En faisant la comparaison des courbes obtenues dans les deux cas que nous venons d'examiner nous sommes conduits à conclure que deux manivelles à simple effet placées dans le prolongement l'une de l'autre ont un débit beaucoup plus régulier que si elles sont disposées à angle droit.

215. Courbes du travail d'une manivelle double à double effet. — Proposons-nous de construire la courbe du travail d'une manivelle double à double effet, dans les deux cas suivants :

a) *Les deux manivelles sont dans le prolongement l'une de l'autre.*

Digitized by Google

— Elles travaillent alors toujours ensemble et pour un demi-tour, les ordonnées de la courbe du produit (fig. 287) ont pour valeurs respectives :

$\overline{0'.1'}+\overline{6'.7'}$, $\overline{0'.2'}+\overline{6'.8'}$, $\overline{0'.3'}+\overline{6'.9'}$, $\overline{0'.4'}+\overline{6'.10'}$, $\overline{0'.5'}+\overline{6'.11'}$, $\overline{0'.6'}+\overline{6'.0'}$

Il y a ensuite échange dans les positions qu'elles occupaient au

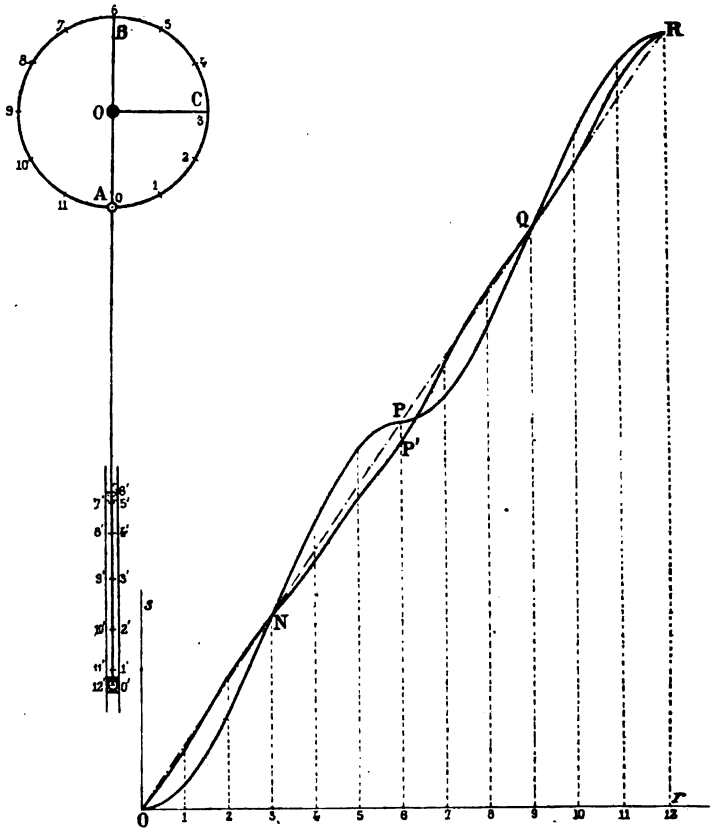


Fig. 287.

départ et la seconde partie PQR de la courbe du produit occupe par rapport à la parallèle à l'axe des temps menée par le point P la même disposition que la première ONP par rapport à cet axe lui-même.

La comparaison de la courbe complète à la droite OR, montre que le débit est accéléré pendant les premier et troisième quarts de tour et qu'il est au contraire retardé pendant les deuxième et quatrième quarts. La résistance est donc plus grande vers la région des points morts ; en langage ordinaire, on dit : *ça tire dur aux points morts*.

Digitized by Google

b) *Les deux manivelles sont à angle droit.* — Les ordonnées de la courbe du produit sont alors :

Pour le premier quart de tour : $\overline{0'.1'} + \overline{3'.4'}$, $\overline{0'.2'} + \overline{3'.5'}$, $\overline{0'.3'} + \overline{3'.6'}$,
Pour le deuxième quart : $\overline{3'.4'} + \overline{6'.7'}$, $\overline{3'.5'} + \overline{6'.8'}$, $\overline{3'.6'} + \overline{6'.9'}$,
Pour le troisième quart : $\overline{6'.7'} + \overline{9'.10'}$, $\overline{6'.8'} + \overline{9'.11'}$, $\overline{6'.9'} + \overline{9'.12'}$,
Enfin pour le dernier quart : $\overline{0'.10'} + \overline{0'.1'}$, $\overline{9'.11'} + \overline{0'.2'}$, $\overline{9'.12'} + \overline{0'.3'}$.

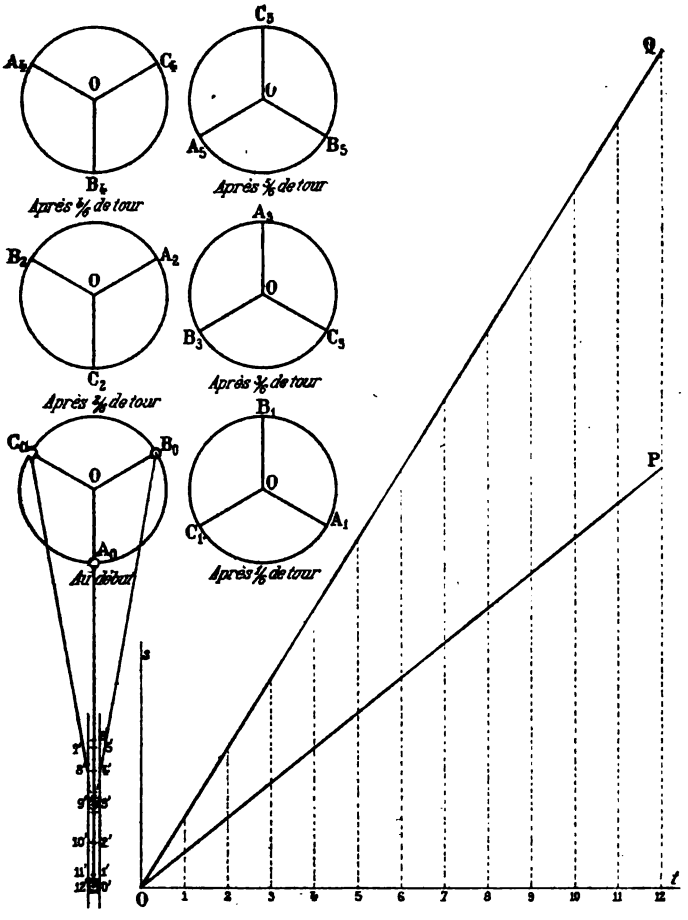


Fig. 288.

La comparaison des deux courbes obtenues dans les deux cas que nous venons d'examiner conduit aux résultats suivants :

1° Le rendement total rR est le même dans les deux cas ;

2° L'uniformité du débit est plus grande dans le cas où les manivelles sont à angle droit.

Digitized by Google

216. Courbes du travail d'une manivelle triple à 120° à simple ou à double effet. — La disposition la plus heureuse à donner aux manivelles correspond au cas où elles font deux à deux des angles de 120° (fig. 288) ; on peut s'en convaincre par la comparaison des tracés des courbes du travail qui correspondent aux différentes inclinaisons qu'on peut leur donner ; pour celles que nous venons de signaler, elles sont à peu près droites en sorte que le débit est sensiblement régulier.

Digitized by Google

CHAPITRE VIII

—

THÉORIE DES PARALLÉLOGRAMMES

217. Définition. — Tout système articulé permettant d'assurer le mouvement rectiligne alternatif d'une tige de piston ou d'un organe quelconque, constitue un parallélogramme.

218. Parallélogramme simple de Watt.

Imaginons un quadrilatère articulé OAO'A' (fig. 289) permettant de transformer la rotation alternative d'un arbre O en une rotation alternative d'un arbre O' qui lui est parallèle ; dans son mouvement, un point quelconque P de la bielle ou de son prolongement décrit une courbe en huit, symétrique par rapport à la ligne des centres et dont les branches sont plus ou moins fermées suivant la position du point choisi.

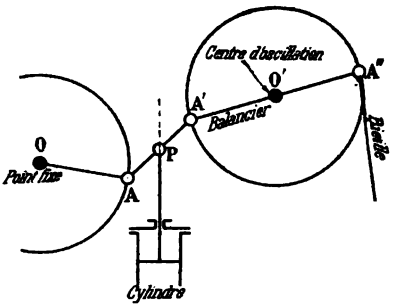


Fig. 289.

Dans le cas particulier où les manivelles et la bielle sont suffisamment longues et que le point décrivant se trouve au milieu de cette deuxième tige, l'une des branches, dans le voisinage du point double, se confond avec une ligne droite sur une certaine étendue. On peut donc le prendre pour joint d'articulation d'une tige de piston et avec une confiance d'autant plus grande que les dimensions des tiges dont nous venons de parler sont elles-mêmes plus grandes. Toutefois comme la course du piston est toujours limitée ainsi que l'emplacement dont on dispose pour l'établissement du mécanisme, Watt a cherché, en fonction de la course l de l'organe à guider en ligne droite, les dimensions minima qu'il

Digitized by Google

convenait de leur donner pour réaliser le guidage demandé. Il en a conclu que $\frac{3l}{2}$ devait être la longueur commune des deux manivelles et $\frac{l}{2}$ celle de la bielle.

Les deux manivelles du mécanisme portent parfois les noms de *fléaux*, *barres d'attache ou demi-balanciers*, la bielle celui de *bride* et les points fixes ceux de *points d'attache*.

Tracé du mécanisme dans un cas particulier. — Proposons-nous d'effectuer le tracé d'un parallélogramme simple de Watt quand l'on connaît en grandeur et position la course $\alpha\beta = l$, de la tige à guider en ligne droite et qu'on astreint la bride à coïncider dans ses positions extrêmes avec la direction du mouvement rectiligne.

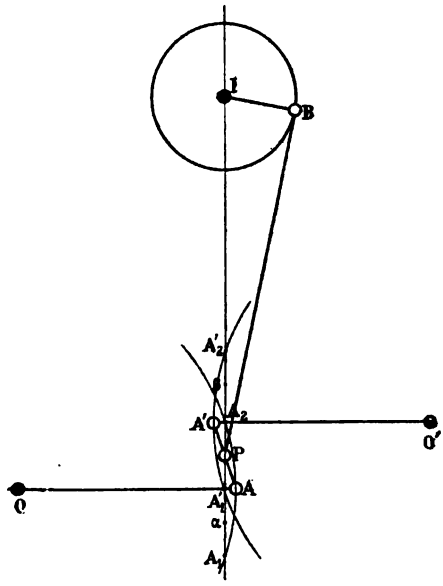


Fig. 290.

Pour déterminer les centres d'oscillation des balanciers qui sont les inconnues du problème, divisons (fig. 290) la course $\alpha\beta$ en quatre parties égales et portons la longueur de l'une des divisions obtenues de α en A_1 d'une part, de β en A'_2 d'autre part. Les segments $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, de longueur commune $\frac{l}{2}$ correspondent alors, d'après l'énoncé, aux positions extrêmes de la bride. La trajectoire du bouton A coïncide donc avec un arc de circonférence de rayon $\frac{3l}{2}$ et qui contient les points A_1 et A_2 ; il a par suite son centre sur la perpendiculaire élevée au milieu A'_1 du segment A_1A_2 en un point O tel que $OA_1 = \frac{3}{2}l$. Par analogie celui de la trajectoire du bouton A' se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu A_2 du segment $A'_1A'_2$ en un point O' distant du point A'_1 de la longueur $\frac{3}{2}l$.

Si nous figurons en OAO'A' la position moyenne du mécanisme et si nous articulons au milieu P de la bride AA' une bielle PB articulée elle-même à l'extrémité d'une manivelle 1B de longueur $\frac{l}{2}$, nous

Digitized by Google

pourrons guider en ligne droite la tige du piston et transformer son mouvement rectiligne alternatif en circulaire continu.

219. Parallélogramme composé de Watt.

Considérons le parallélogramme simple précédent et prolongeons la barre d'attache OA de sa propre longueur jusqu'au point B, puis sur les côtés AB et AA′ construisons le parallélogramme ABCA′. Dans toutes les déformations du mécanisme il reste parallélogramme et si nous désignons par P le point de rencontre de la bride AA′ avec la droite OC, nous pouvons écrire, à cause de la similitude des triangles OAP et OBC :

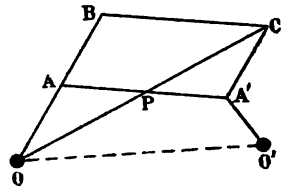


Fig. 291.

$$\frac{OC}{OP} = \frac{OB}{OA} = 2.$$

La trajectoire du point C est donc la courbe homothétique de celle décrite par le point P par rapport au centre O d'homothétie et au rapport 2 d'homothétie. Si donc nous choisissons les dimensions du mécanisme précédent, de façon que le point P décrive une courbe à longue inflexion, nous pourrons articuler au point C la tige d'un piston et nous aurons ainsi assuré son guidage.

Tracé du parallélogramme. — Proposons-nous avec Watt d'effectuer le tracé de son parallélogramme dans le cas où l'on suppose au point d'articulation C de la tige du piston une déviation nulle aux extrémités et au milieu de sa course et où on l'astreint par conséquent à se trouver dans ces positions sur la droite C_1C_3 perpendiculaire au milieu I de la flèche A_2H bissectrice de l'angle A_1OA_3 formé par les positions extrêmes du balancier ; où l'on admet la relation $OI = 3A_1H$ et où l'on adopte pour longueurs des côtés du parallélogramme des dimensions satisfaisant aux conditions suivantes :

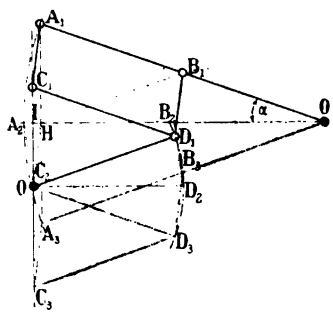


Fig. 292.

$$A_1B_1 = \frac{OA_1}{2}.$$

Digitized by Google

$$\frac{3l}{7} < A_1C_1 < \frac{l}{2},$$

l désignant la longueur de la course du piston.

a) *Calcul de l'amplitude du balancier.* — Soient a la longueur du balancier, α son amplitude.

Le point I étant par hypothèse le milieu du segment A_2H, nous pouvons écrire :

$$OI = \frac{OA_2 + OH}{2},$$

et comme le triangle rectangle A_1OH donne :

$$OH = a\cos\alpha, \qquad A_1H = a\sin\alpha,$$

l'équation $OI = 3A_1H$ devient :

$$\frac{a(1+\cos\alpha)}{2} = 3a\sin\alpha,$$

ou :

$$1 + \cos\alpha = 6\sin\alpha.$$

Résolue par rapport à α, elle donne :

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6}.$$

Par suite :

$$\alpha = 18°.55'.28''.$$

b) *Calcul de la longueur du balancier.* — La course C_1C_3 du point d'articulation C de la tige du piston étant égale à la corde A_1A_3, le segment A_1H vaut $\frac{l}{2}$ et le triangle A_1OH permet d'écrire :

$$\frac{l}{2} = a\sin\alpha,$$

ou :

$$a = \frac{l}{2\sin\alpha}.$$

Mais puisque $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6}$,

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{12}{37}.$$

Par suite :

$$a = \frac{37l}{24}.$$

c) *Calcul de la longueur* 1H. — Sur la figure nous lisons :

$$2IH = OA_2 - OH,$$

Digitized by Google

ou :

$$IH = \frac{l(1-\cos\alpha)}{2} = l\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Mais comme :

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

nous pouvons finalement écrire :

$$IH = \frac{l}{37}.$$

d) *Recherche du point O' d'attache.* — Le point d'attache O' coïncide avec le centre de la circonférence qui passe par les trois points D_1, D_2, D_3. Pour le déterminer remarquons que le point I étant le milieu du segment A_2H, nous avons les relations :

$$C_2H = C_2A_2 = B_1D_1.$$

Mais comme les droites A_1C_1 et C_2H sont parallèles, la figure $B_1HC_2D_1$ est un parallélogramme et nous pouvons écrire :

$$C_2D_1 = HB_1.$$

D'autre part, dans le triangle rectangle A_1OH, la médiane HB_1 étant moitié de l'hypothénuse, nous avons :

$$C_2D_1 = C_2D_2.$$

Par analogie :

$$C_2D_2 = C_2D_3,$$

et le point O' d'attache coïncide avec le point C_2.

Des résultats que nous venons d'obtenir et de la connaissance du segment C_1C_3, nous pouvons déduire la position du point H, celle de la corde A_1A_3, le centre d'oscillation O du balancier et figurer le parallélogramme dans ses positions extrêmes et moyennes.

Relations à une même époque entre les vitesses linéaires des quatre sommets du parallélogramme. — Soient OABCDO' (fig. 293) la position du parallélogramme à l'époque considérée t et E le point de rencontre de la droite CD avec la parallèle menée par le point O à la droite AD.

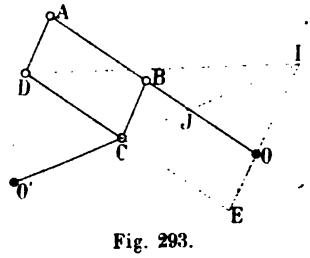


Fig. 293.

La figure OBCE étant un parallélogramme, dans toutes les déformations du mécanisme, la distance OE demeure constante. La tige CD de grandeur fixe se déplace donc dans le plan de la

Digitized by Google

figure, et ses points E et C décrivent des circonférences de centres O et O'; le point de rencontre I des rayons O'C et OE coïncide par suite avec le centre instantané de rotation de l'époque considérée et nous pouvons écrire :

$$\frac{V_C}{IC} = \frac{V_D}{ID}. \qquad (1)$$

D'autre part, les points A et B tournant autour de l'axe O, leurs vitesses V_A et V_B sont liées par la relation :

$$\frac{V_A}{OA} = \frac{V_B}{OB}. \qquad (2)$$

De même, dans le système invariable BC, les rayons OB et O'C relatifs aux trajectoires de ses points B et C se coupant au centre instantané J de rotation, nous avons la relation :

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{JB}{JC},$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{V_B}{OB} = \frac{V_C}{IC}, \qquad (3)$$

par suite de la similitude des triangles JBC, JIO.

La comparaison des proportions (1), (2) et (3) nous conduit alors aux suivantes :

$$\frac{V_A}{OA} = \frac{V_B}{OB} = \frac{V_C}{IC} = \frac{V_D}{ID}.$$

Ce sont les relations cherchées; elles expriment qu'à un même instant, les vitesses des points A, B, C, D sont proportionnelles aux segments OA, OB, IC et ID.

220. Parallélogramme pour bateaux.

Le parallélogramme pour bateaux est un parallélogramme de Watt légèrement modifié.

Le balancier, formé de deux pièces semblables OA (fig. 294) et symétriquement disposées par rapport au cylindre, se trouve placé à la partie inférieure de la machine pour ne pas nuire à la stabilité du bateau. A son

Digitized by Google

extrémité A, on articule une tige AB qui constitue l'un des côtés d'un premier parallélogramme ABCD et au lieu d'astreindre le sommet C à tourner autour d'un point fixe comme dans le parallélogramme précédent, on articule l'autre balancier O'E au point E du côté CD. On peut ainsi réduire la hauteur à laquelle se trouve l'axe O' sans modifier le principe du mécanisme. Enfin une barre BB' à laquelle on articule la tige du piston réunit les sommets B et B' de deux parallélogrammes symétriquement disposés par rapport au cylindre.

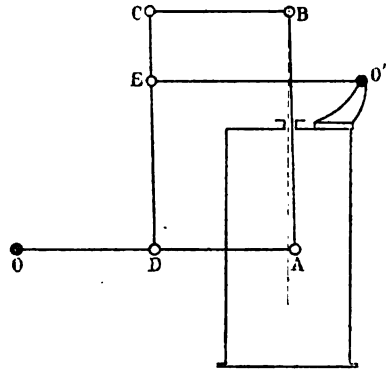


Fig. 294.

221. Parallélogramme de Tchébicheff.

Imaginons un quadrilatère articulé OAO'A' (fig. 295) permettant de transformer la rotation continue de l'arbre O' en une rotation alternative de l'arbre O et adjoignons-lui le triangle articulé AA'M. Dans le mouvement du mécanisme, le sommet M décrit une courbe fermée qui admet pour axe de symétrie la droite OM obtenue en joignant le point O à la position qu'occupe le point M quand la manivelle O'A' se trouve en coïncidence avec le pont. Suivant les dimensions données aux tiges du mécanisme, elle a

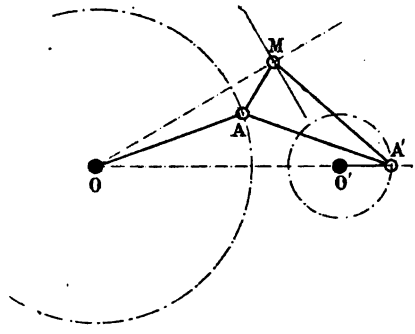


Fig. 295.

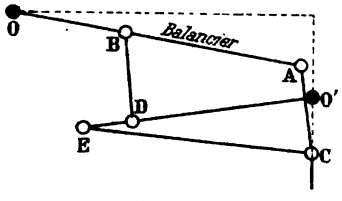


Fig. 296.

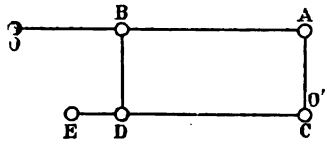


Fig. 297.

des formes très variées et Tchébicheff, par un calcul dans le détail

Digitized by Google

duquel nous n'entrerons pas, a conclu que lorsque les trois barres OA, AA', A'M avaient même longueur, elle coïncidait sensiblement avec une ligne droite. Lorsque ces conditions sont remplies son système articulé peut donc se classer dans la catégorie des parallélogrammes.

Des considérations analogues aux précédentes l'ont conduit à un autre parallélogramme représenté par les figures 296 et 297, dans deux de ses positions et composé de cinq tiges comme celui de Watt.

222. Parallélogramme de Bourdon.

Le parallélogramme de Watt présente deux inconvénients : Le point

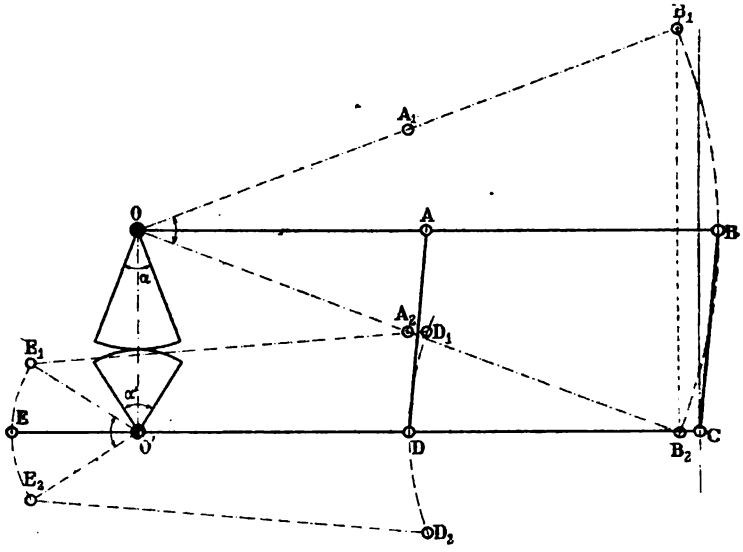


Fig. 298.

d'attache occupe une position gênante pour le graissage et le bâti du mécanisme est trop grand.

Le parallélogramme de Bourdon donne à la barre d'attache une position plus avantageuse ; son tracé repose sur les considérations suivantes :

Imaginons un parallélogramme de Watt dans sa position moyenne et marquons en D, D_1, D_2 (fig. 298), les positions moyenne et extrême du point d'articulation de la barre d'attache ; elles appartiennent, comme nous l'avons établi, à une circonférence décrite du point C comme centre avec CD pour rayon.

Ceci posé, du point O abaissons la perpendiculaire OO' sur CD, puis de son extrémité O' comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons une circonférence et prenons ses points de rencontre E_1, E_2, avec des

Digitized by Google

arcs de circonférence de centres D_1 et D_2 et de rayon ED. Calons ensuite sur l'arbre O' une manivelle O'E articulée en E à la bielle ED laquelle est articulée par son autre extrémité au sommet D du parallélogramme ; nous assujettissons ainsi ce sommet à décrire une courbe qui passe par les points D, D_1, D_2 et le guidage obtenu, quoique n'étant qu'approximatif, est aussi rigoureux que celui de Watt.

Pour qu'aux positions extrêmes du balancier correspondent bien celles E_1D_1, E_2D_2, de la bielle on communique à l'arbre O' son mouvement par le procédé suivant : on mesure les angles α et α' d'oscillation du balancier et de la manivelle OE ; puis l'on cale sur les arbres O et O' deux secteurs symétriques par rapport à la droite OO', d'ouvertures égales à ces angles et dont les rayons R et R' satisfont à la relation :

$$R\alpha = R'\alpha'.$$

Le mouvement du secteur O, identique à celui du balancier, communique alors au secteur O' et par suite à la manivelle OE le mouvement que nous lui avions assigné.

223. Parallélogramme d'Olivier Ewans.

Le parallélogramme d'Olivier Ewans repose sur le théorème suivant :

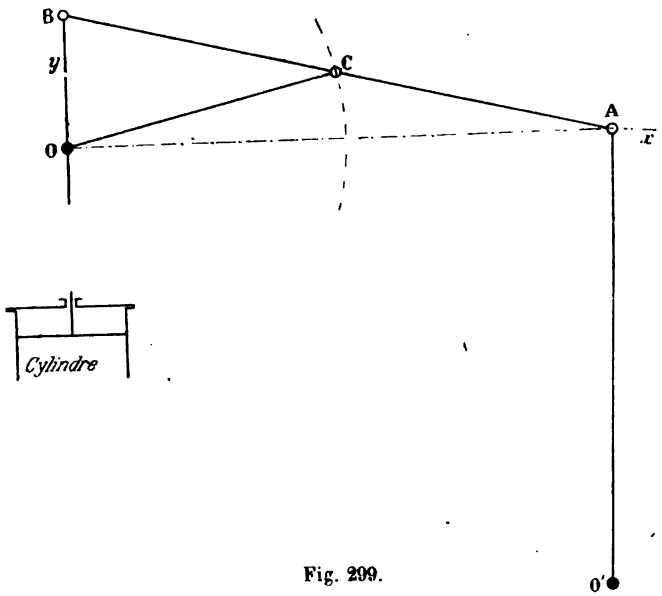


Fig. 299.

quand les extrémités A et B d'une droite AB de longueur constante (fig. 299) glissent sur deux droites rectangulaires, un quelconque de ses points, C

Digitized by Google

par exemple, décrit une ellipse dont les demi-axes ont des longueurs égales à celles des segments CA et CB. Si donc CA = CB, l'ellipse devient une circonférence de centre O et de rayon $\frac{AB}{2}$.

Il en résulte que si par l'intermédiaire d'un balancier dont le centre d'oscillation O′ est aussi éloigné que possible, nous assujettissons le point A à décrire la droite Ox et si, par l'intermédiaire de la manivelle OC calée sur l'arbre O, nous astreignons le point C à décrire la circonférence OC, le point B à son tour décrira approximativement l'axe Oy et le mécanisme obtenu entrera dans la catégorie des parallélogrammes.

Remarque. — Le parallélogramme d'Ewans est un cas particulier de celui de Watt. Nous pouvons, en effet, envisager les tiges OC et O′A comme des balanciers articulés aux extrémités de la bielle AC sur le prolongement de laquelle nous articulons en B la tige d'un piston et regarder la trajectoire de ce point comme une courbe en huit dont les deux branches sont très voisines l'une de l'autre.

224. Parallélogramme de Klérity.

Le parallélogramme de Klérity (fig. 300) est un guide rigoureux de

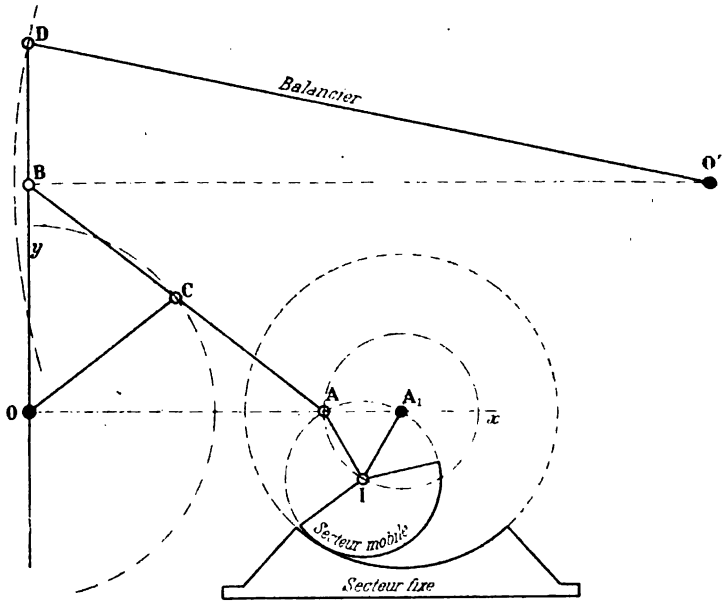


Fig. 300.

mouvement rectiligne. Il diffère du précédent par la manière même dont on astreint le point A à décrire la droite Ox.

Digitized by Google

On cale, à cet effet, sur un arbre A_1, choisi sur Ox de façon que $OA_1 = AB$, une manivelle A_1I dont le bouton I sert d'axe à un secteur qui peut rouler sur un secteur fixe de rayon double et qui est invariablement lié au point A par une tige IA de même longueur que la manivelle. Dans ces conditions, d'après le théorème de Lahire démontré en cinématique théorique § 149, le point A a pour trajectoire la droite Ox.

225. Parallélogramme de Peaucellier.

Le parallélogramme de Peaucellier (fig. 301) est un inverseur. Il se compose de six barres : quatre d'entre elles forment un losange articulé ABCD; les deux autres OA, OC, d'égale longueur, sont articulées d'une part aux deux sommets opposés A et C du losange, d'autre part à un point fixe O auquel on donne le nom de centre d'oscillation.

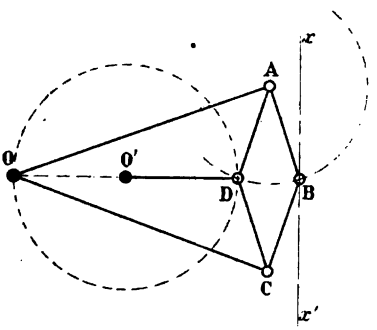


Fig. 301.

Dans toutes les positions du mécanisme, les points B et D sont inverses l'un de l'autre. Considérons, en effet, celle de la figure ; par hypothèse nous avons :

$$OA = OC, \quad DA = DC, \quad BA = BC.$$

Les sommets O, D, B sont donc équidistants des points A et C ; ils appartiennent par suite à la perpendiculaire élevée au milieu de AC.

D'autre part, la circonférence décrite du point A comme centre avec AD pour rayon passant par le point B, le produit $OD \times OB$ exprime la puissance du point O par rapport à cette courbe ; il a donc pour valeur la quantité constante $\overline{OA}^2 - \overline{OD}^2$.

Il en résulte que si au moyen d'une manivelle O'D, calée sur un arbre quelconque O', on astreint le point D à décrire une circonférence passant par O, le mouvement du sommet B sera rectiligne et on pourra l'articuler à la tige d'un piston.

Positions remarquables du système. — Les positions remarquables ou critiques du mécanisme sont celles pour lesquelles deux barres au moins sont en ligne droite.

a) *Première position.* — Considérons le triangle O'DA ; son angle $\widehat{O'DA}$ est variable et ses deux côtés O'A et DA de longueurs constantes

Digitized by Google

viennent dans le prolongement l'un de l'autre lorsqu'ils vérifient la relation :

$$O'A = O'D + DA.$$

Par suite, si du point O′ comme centre avec la longueur O′D + DA pour rayon, nous décrivons un arc de circonférence et si nous prenons son point de rencontre A_1 (fig. 302) avec la trajectoire du point A, dans la position $A_1B_1C_1D_1$ le mécanisme aura ses deux tiges O′D et DA

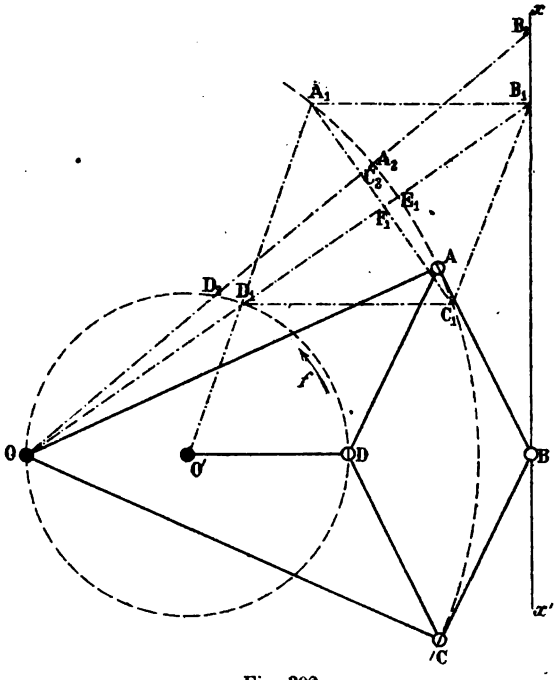


Fig. 302.

en ligne droite et la barre A_1B_1 sera en particulier perpendiculaire à la direction xx' du mouvement rectiligne.

En effet, les triangles isocèles $B_1A_1D_1$, $OO'D_1$ nous donnent :

$$\widehat{A_1B_1D_1} = \widehat{A_1D_1B_1},$$

$$\widehat{OD_1O'} = \widehat{D_1OO'}.$$

Mais les angles $\widehat{A_1D_1B_1}$, $\widehat{OD_1O'}$ sont égaux comme opposés par le sommet; par suite :

$$\widehat{A_1B_1D_1} = \widehat{D_1OO'}.$$

Le côté A_1B_1 est donc parallèle à OP et par suite perpendiculaire à la trajectoire du point B.

Digitized by Google

b) *Deuxième position.* — La deuxième position remarquable du mécanisme correspond à celle pour laquelle les trois côtés du triangle déformable OAB satisfont à la relation :

$$OB = OA + AB.$$

Nous l'obtiendrons donc en $OA_2B_2C_2D_2$ en décrivant du point O comme centre avec OA + AB pour rayon un arc de circonférence et prenant son point de rencontre B_2 avec la droite xx'.

La rotation de l'arbre O ayant lieu dans le sens de la flèche *f*, par exemple, il nous est facile d'établir que la position critique examinée en premier lieu est atteinte avant l'autre ; il nous suffit pour cela de vérifier l'inégalité :

$$OB_2 > OB_1.$$

De ses deux membres, retranchons le segment OA; elle peut alors s'écrire :

$$A_2B_2 > E_1B_1.$$

ou bien encore, puisque $A_2B_2 = A_1B_1$:

$$A_1B_1 > E_1B_1,$$

et comme le triangle $A_1B_1F_1$ est rectangle, son hypoténuse A_1B_1 est plus grande que le côté F_1B_1 de l'angle droit et à fortiori plus grande que le segment E_1B_1.

En pratique, pour éviter les chocs et tiraillements qui ne manqueraient pas de se produire, il est indispensable de ne pas atteindre les positions critiques que nous venons d'étudier. Il suffit pour cela de donner au mécanisme de l'élasticité et d'obliger le point d'articulation de la tige du piston à se mouvoir dans un espace qui ne renferme pas le point B_1.

Construction du parallélogramme pour une machine à action directe connaissant en grandeur et direction la course $\alpha\beta$ de la tige du piston. — Une machine est dite à action directe lorsqu'elle permet de transformer par leur système bielle et manivelle le mouvement rectiligne alternatif d'une tige de piston en un mouvement circulaire continu.

Soient (fig. 303) $\alpha\beta$ la course du piston en grandeur et position, O un point situé aussi loin que possible sur la perpendiculaire élevée au milieu B du segment précédent et que nous prendrons pour centre d'oscillation du mécanisme.

Ceci posé, au-dessus du point α, prenons un point B_1 et faisons-le correspondre à la position qu'occupe le point B d'articulation de la tige

Digitized by Google

du piston lorsque le mécanisme se trouve dans sa première position critique $A_1B_1C_1D_1$; puis prolongeons le côté A_1D_1 jusqu'à sa rencontre O' avec la droite OB. Nous obtiendrons ainsi le centre de rotation de la ma-

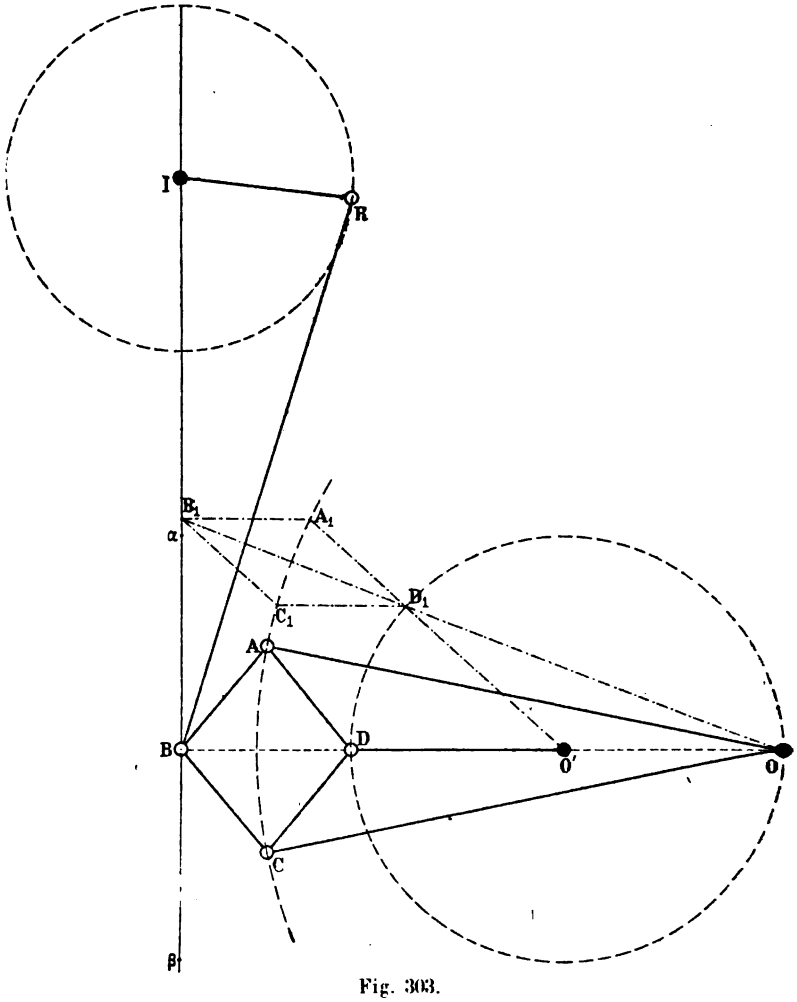


Fig. 303.

nivelle O'D et tous les éléments du parallélogramme nous sont dès lors connus ; nous pouvons donc le figurer, par exemple, en OABCD dans sa position moyenne et transformer par l'intermédiaire de la bielle RB et de la manivelle $IR = \frac{\alpha\beta}{2}$ le mouvement rectiligne alternatif de la tige du piston articulée à la bielle au point B en un mouvement circulaire continu de l'arbre I.

Digitized by Google

Remarque. — Dans le mécanisme précédent, les sommets B et D d'articulation des tiges se trouvent d'un même côté du centre O d'oscillation; le produit $OB \times OD$ est donc positif et le losange est dit *positif*.

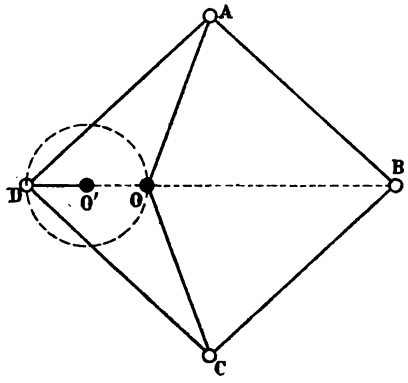


Fig. 304.

Dans le cas de la figure 304, la puissance d'inversion est négative et le losange est *négatif*.

Pratiquement, le losange de Peaucellier permet de tracer des circonférences de grands rayons à la condition de ne plus assujettir la trajectoire du sommet D à passer par le centre O d'inversion.

226. Parallélogramme de Hart.

Le parallélogramme de Hart n'est autre qu'un contre-parallélogramme ABCD (fig. 305), assujetti à se mouvoir autour d'un point fixe O pris sur la tige BD et dans lequel on astreint le point Q qui partage la tige CD dans le rapport $\frac{OB}{OD}$ à décrire une circonférence qui passe par le point fixe.

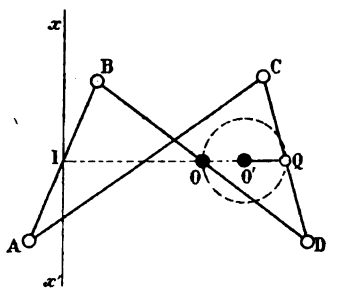


Fig. 305.

Le mécanisme ainsi obtenu est un inverseur. Désignons, en effet, par I le point qui partage la tige AB dans le rapport $\frac{OB}{OD}$ et considérons la droite OI; comme elle partage les côtés AB et BD du triangle ABD dans un même rapport, elle est parallèle à sa base AD. Pour la même raison la droite OQ est parallèle à la base BC du triangle BCD et comme dans toutes ses positions le contre-parallélogramme est toujours contre-parallélo-

Digitized by Google

gramme, ses deux bases AD et BC sont parallèles et les trois points O, I, Q sont constamment en ligne droite.

D'autre part, les triangles semblables IBO et ABD, OQD et BCD donnent les proportions :

$$\frac{OI}{AD} = \frac{BO}{BD},$$

$$\frac{OQ}{BC} = \frac{DO}{BD}.$$

Par suite :

$$OI = AD \times \frac{BO}{BD}, \quad OQ = BC \times \frac{DO}{BD}.$$

Ou bien encore :

$$OI \times OQ = AD \times BC \times \frac{BO \times DO}{BD^2}.$$

Mais, comme d'après un théorème de géométrie plane :

$$\overline{BD}^2 - \overline{AB}^2 = 2AD \times \frac{BC}{2} = AD \times BC,$$

le produit $OI \times OQ$ a finalement pour expression :

$$OI \times OQ = \frac{BD^2 - AB^2}{BD^2} \times DO \,.\, BO.$$

Il est donc constant et le parallélogramme de Hart est bien un inverseur. Il est négatif dans le cas de la figure 305, positif dans celui de la

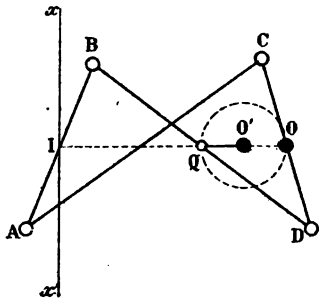


Fig. 306.

figure 306 et le point I inverse du point Q possède un mouvement rectiligne alternatif ; on peut donc le prendre comme point d'articulation d'une tige de piston.

Positions remarquables du mécanisme. — Pour fixer les idées, supposons que le sens de rotation du système soit celui de la flèche f et que son centre d'oscillation O soit au milieu de la tige BD.

Digitized by Google

Les extrémités de cette dernière se déplaceront alors sur la circonférence qui a OB pour rayon et le point O pour centre.

a) *Première position.* — Considérons le triangle déformable O'QD ; son angle en Q est variable et les deux côtés qui le comprennent viennent dans le prolongement l'un de l'autre lorsque la relation :

$$O'D = O'Q + QD$$

est vérifiée. Si donc du point O' comme centre, avec O'Q + QD pour

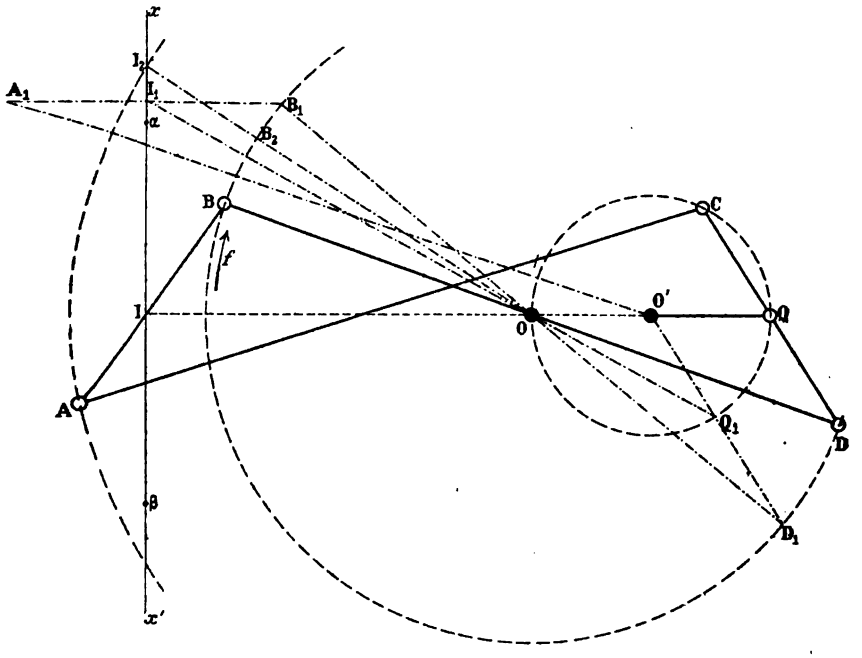


Fig. 307.

rayon, nous décrivons un arc de circonférence et si nous prenons son point de rencontre D_1 avec la trajectoire du point D, nous obtiendrons en $A_1B_1C_1D_1$ une position critique du mécanisme pour laquelle les tiges O'Q et QD sont en ligne droite et la barre A_1B_1 perpendiculaire à la direction XX' du mouvement rectiligne.

En effet, dans toutes les positions du système, la droite IQ fait des angles égaux avec les côtés non parallèles du trapèze ; par suite :

$$\widehat{B_1I_1O} = \widehat{O'Q_1O}.$$

D'autre part, le triangle $OO'Q_1$ étant isocèle :

$$\widehat{O'Q_1O} = \widehat{O'OQ_1}.$$

Digitized by Google

Par suite :

$$\widehat{B_1I_1O} = \widehat{O'OQ_1}.$$

Ces deux angles ayant un côté commun, leurs seconds côtés I_1B_1 et OO' sont parallèles et par suite perpendiculaires à la direction xx' du mouvement rectiligne.

b) *Deuxième position.* — La deuxième position critique du mécanisme correspond au cas où les deux côtés IB, OB du triangle IBO sont en ligne droite, c'est-à-dire satisfont à la relation :

$$IO = IB + BO.$$

Nous obtiendrons donc celle I_2 du point I en prenant le point de rencontre de sa trajectoire avec un arc de circonférence de centre O et de rayon IB + BO et avec nos hypothèses, nous pouvons affirmer qu'elle est atteinte après celle I_1 que nous avons examinée en premier lieu.

Le triangle OI_1B_1 donne en effet la relation :

$$OI_1 < OB_1 + I_1B_1.$$

Mais comme :

$$OB_2 = OB_1, \qquad I_2B_2 = I_1B_1.$$

Elle peut s'écrire :

$$OI_1 < OB_2 + I_2B_2,$$

ou :

$$OI_1 < OI_2$$

Construction du parallélogramme de Hart pour une machine à action directe, connaissant les longueurs des tiges et la course du piston en grandeur et direction. — Soit $\alpha\beta$ le segment de droite qui mesure en grandeur et position la course donnée. En son milieu I élevons la perpendiculaire et prenons sur elle un centre d'oscillation O aussi éloigné que possible ; puis, au delà du point α, prenons un point I_1 et faisons-le correspondre à la position particulière occupée par le point I lorsque le mécanisme se trouve dans sa première position critique. Le segment A_1B_1, perpendiculaire au point I_1 à la direction XX′ du mouvement rectiligne, fournira celle du côté AB et la circonférence de centre O et de rayon OB_1 sera la trajectoire des points B et D. Le point D_1 diamétralement opposé au point B_1 appartient donc au côté D_1Q_1 et son point de rencontre O′ avec la droite IO n'est autre que le centre d'oscillation de la manivelle O′Q.

Tous les éléments du parallélogramme nous sont donc connus. Nous pouvons par suite le représenter en OABCD dans sa position moyenne et transformer par l'intermédiaire d'une bielle et d'une manivelle le mouvement rectiligne alternatif du point d'articulation I de la tige du piston en un mouvement circulaire continu.

Digitized by Google

227. Parallélogramme de Perrolaz.

Le parallélogramme de Perrolaz est un système articulé formé de deux barres égales AA′ et BB′ invariablement liées l'une à l'autre, oscillant autour de leur milieu O et aux extrémités desquelles sont articulées les tiges égales AC et B′C d'une part, BD et A′D d'autre part.

Dans le cas où, par l'intermédiaire d'une manivelle O′C, on assujettit le point C à décrire une circonférence passant par le point O, il permet de transformer le mouvement circulaire de ce point en un mouvement rectiligne alternatif du point D.

En effet, dans toutes les positions du système, les deux cordes AB′ et BA′ sont toujours parallèles et les perpendiculaires OE, OF, élevées en leurs milieux coïncident. La première passant par le point C, la seconde par le point D, les trois points O, C et D sont en ligne droite. Comme de plus :

$$OE = OF, \qquad EC = FD,$$

nous pouvons écrire :

$$OC = EC - EO,$$
$$OD = OF + FD = EO + EC.$$

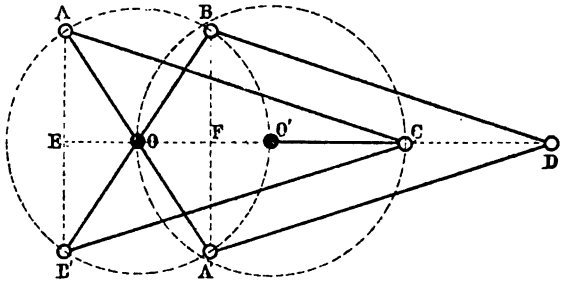


Fig. 308.

Par suite :

$$OC \times OD = (EC + EO)(EC - EO) = \overline{EC}^2 - \overline{EO}^2$$
$$= \overline{EC}^2 - (\overline{AO}^2 - \overline{AE}^2) = \overline{EC}^2 + \overline{AE}^2 - \overline{AO}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AO}^2.$$

Le produit $OC \times OD$ est donc constant et le mécanisme est bien un inverseur.

Positions remarquables du mécanisme. — Elles correspondent aux cas où deux des barres du mécanisme sont en ligne droite et s'obtiennent par des raisonnements identiques aux précédents.

Digitized by Google

Digitized by Google

LIVRE III

—

TROISIÈME GENRE

TRANSMISSIONS PAR L'INTERMÉDIAIRE D'UN LIEN FLEXIBLE

—

PREMIÈRE CLASSE

LIAISON DE DEUX ROTATIONS

—

CHAPITRE PREMIER

—

TRANSFORMATION D'UNE ROTATION CONTINUE EN UNE ROTATION CONTINUE AVEC RAPPORT DE VITESSES ANGULAIRES CONSTANT.

228. — Entre deux arbres dont l'écartement est trop grand ou qu'il est impossible de conduire par roues dentées, les transmissions de mouvement se font par l'intermédiaire d'un lien flexible. C'est en général une courroie, une corde, ou bien encore une chaîne qui vient s'enrouler sur deux tambours circulaires appelés poulies et calés sur les arbres de rotation. Leur description faisant partie du cours de technologie de troisième division, nous ne nous y arrêterons pas.

Lorsque la poulie menante, calée sur l'arbre moteur, se met en mouvement, elle entraîne avec elle la courroie par suite de l'adhérence de leurs surfaces ; cette dernière, à son tour, pour la même raison, communique son mouvement à l'autre poulie et par suite à l'arbre à conduire.

Le brin d'une courroie qui s'enroule sur une poulie menante est dit *conducteur,* celui au contraire qui se déroule est appelé *brin conduit.*

Digitized by Google

229. Théorème. — *Dans une transmission par courroies, le rapport des vitesses angulaires des arbres de rotation est constant.*

Soient, en effet, R_1 et R_2 les rayons des deux poulies, ω_1 et ω_2 leurs vitesses angulaires à l'instant considéré.

Pendant le temps dt la longueur $\omega_1 . R_1 . dt$ du brin qui se déroule étant égale à la longueur $\omega_2 . R_2 . dt$ du brin qui s'enroule, entre les vitesses angulaires des deux arbres existe la relation :

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

de laquelle nous déduisons :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Autrement dit : *Dans une transmission par courroies les vitesses angulaires de deux arbres de rotation sont inversement proportionnelles aux rayons des poulies.*

Il est d'usage de diviser l'étude des transmissions de mouvement par courroies en deux parties : La première correspond aux courroies qui se guident elles-mêmes ; la seconde, à celle dont le guidage nécessite l'emploi des poulies auxiliaires appelées *poulies-guides*.

230. Transmission par courroies se guidant elles-mêmes.

L'expérience prouve que la transmission de mouvement par courroies se guidant elles-mêmes est assurée si la ligne médiane du brin qui

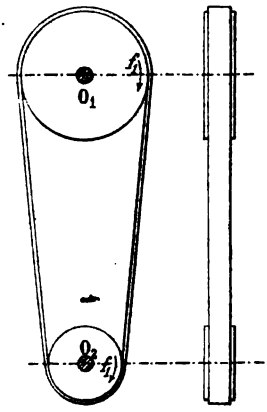


Fig. 309.

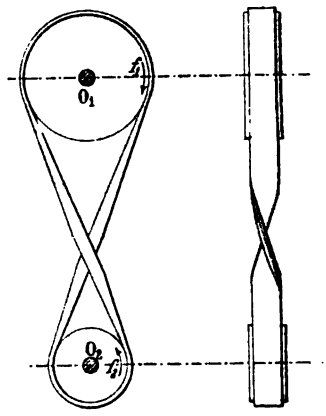


Fig. 310.

vient s'enrouler sur une poulie se trouve dans le plan moyen de cette poulie. Ce principe admis nous diviserons l'étude des transmissions par courroies se guidant elles-mêmes en plusieurs cas :

Digitized by Google

a) *Les axes de rotation sont parallèles.* — Dans le cas où les arbres de rotation sont parallèles (fig. 309 et 310), la condition précédente se trouve réalisée si les plans moyens des deux poulies coïncident et si l'on fait usage soit d'une courroie droite, soit d'une courroie croisée pour obtenir des rotations de même sens ou de sens contraires.

Calcul de la longueur d'une courroie qui embrasse deux poulies. — Proposons-nous de calculer en fonction des rayons R_1 et R_2 de deux poulies, de la distance de leurs centres, la longueur d'une courroie qui les embrasse.

a) *Cas de la courroie droite.* — La courroie étant symétrique par rapport à la ligne des centres, si nous désignons par l sa longueur, par α son inclinaison sur cette ligne, nous pourrons écrire (fig. 311) :

$$l = 2A_1A_2 + 2 \text{ arc } \widehat{A_1D_1} + 2 \text{ arc } \widehat{A_2D_2}.$$

Pour évaluer les différents termes de cette somme, menons par le centre O_2 la parallèle O_2C à la tangente commune A_1A_2 et considérons le triangle rectangle O_1O_2C ; il donne d'une part :

$$A_1A_2 = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2};$$

d'autre part :

$$\sin \alpha = \frac{R_1 - R_2}{d},$$

ou :

$$\alpha = \text{arc sin } \frac{R_1 - R_2}{d}.$$

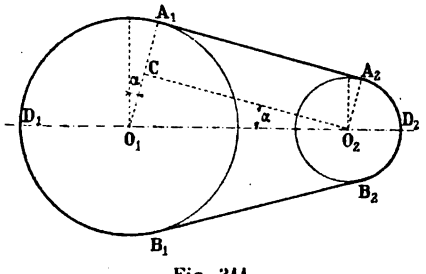


Fig. 311.

Les angles $\widehat{A_1O_1D_1}$, $\widehat{A_2O_2D_2}$, ayant respectivement pour valeurs $\frac{\pi}{2} + \alpha$ et $\frac{\pi}{2} - \alpha$, les arcs qu'ils interceptent sur des circonférences de rayons R_1 et R_2 ont pour valeurs :

$$\widehat{A_1D_1} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) R_1,$$

$$\widehat{A_2D_2} = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) R_2.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de l, elle prend finalement la forme :

$$l = 2\sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2} + \pi(R_1 + R_2) + 2(R_1 - R_2) \cdot \text{arc sin } \frac{R_1 - R_2}{d}.$$

b) *Cas de la courroie croisée.* — En conservant les notations précédentes, nous pourrons écrire (fig. 312) :

$$l = 2A_1A_2 + 2 \text{ arc } \widehat{A_1D_1} + 2 \text{ arc } \widehat{A_2D_2}.$$

Digitized by Google

Pour évaluer les différents termes de cette somme, considérons le triangle rectangle O_1CO_2, il donne :

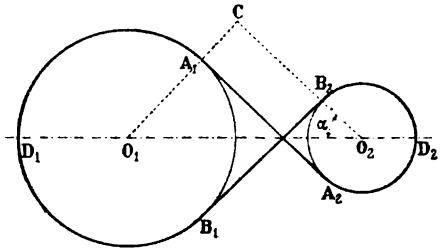


Fig. 312.

$$A_1A_2 = \sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)}$$

et

$$\sin \alpha = \frac{R_1 + R_2}{d},$$

ou :

$$\alpha = \text{arc sin} \cdot \frac{R_1 + R_2}{d}.$$

D'autre part, les angles $\widehat{A_1O_1D_1}$, $\widehat{A_2O_2D_2}$ qui ont pour valeur commune $\frac{\pi}{2} + \alpha$ interceptent sur les circonférences qui leur correspondent des arcs $\widehat{A_1D_1}$, $\widehat{A_2D_2}$ qui ont pour expressions :

$$\widehat{A_1D_1} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) R_1,$$

$$\widehat{A_2D_2} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) R_2.$$

Si donc, nous substituons ces différentes valeurs dans l'expression de l, elle prend finalement la forme :

$$l = 2\sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)^2} + \pi (R_1 + R_2) + 2 (R_1 + R_2) \text{ arc sin } \frac{R_1 + R_2}{d}. \quad (1)$$

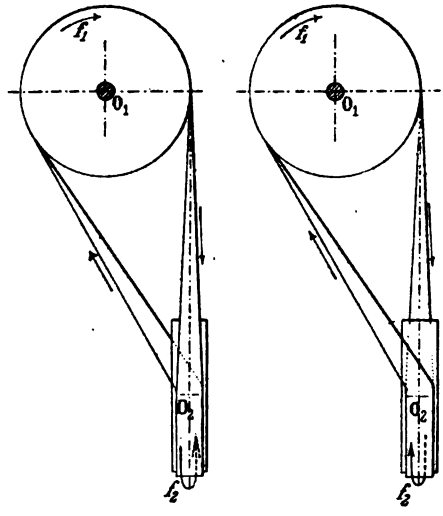


Fig. 313.

Elle ne dépend donc que de la somme $R_1 + R_2$ des rayons des deux

Digitized by Google

poulies et non de leur somme et de leur différence comme dans le cas précédent.

b) *Les axes de rotation se coupent.* — Dans le cas où les arbres de rotation se coupent, la transmission est impossible par l'intermédiaire de poulies se guidant elles-mêmes.

c) *Les axes de rotation ne sont pas situés dans le même plan.* — Dans le cas où les arbres de rotation ne se rencontrent pas, il est possible de transmettre le mouvement de l'un à l'autre par courroie semi-croisée, disposée de telle façon que la droite d'intersection des plans moyens passe par les points où la courroie abandonne les deux poulies. La première figure 313 se rapporte au cas où les deux poulies doivent tourner dans le même sens, la suivante au cas où elles doivent tourner en sens contraires.

Dans toutes ces transmissions, il est nécessaire d'admettre que la valeur minima de la distance des arbres est au moins égale à deux fois le diamètre de la grande poulie. On conçoit en effet que dans le cas où cette distance est par trop réduite, l'adhérence de la courroie sur la petite poulie est inférieure à ce qu'elle doit être pour assurer la transmission.

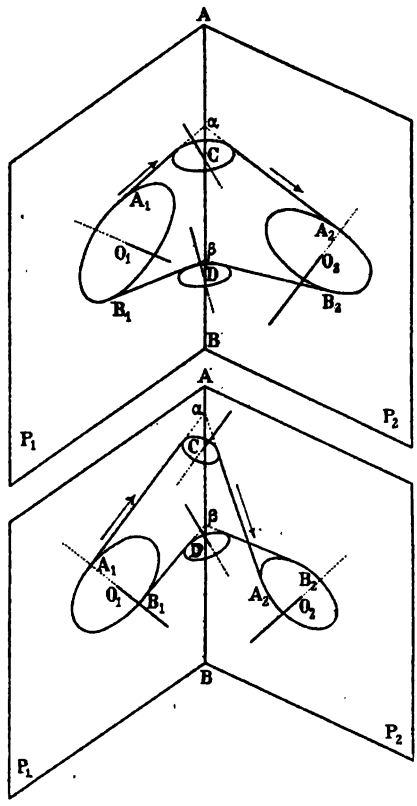


Fig. 314.

231. TRANSMISSION PAR COURROIES AVEC POULIES-GUIDES.

Dans l'étude des transmissions par courroies avec poulies-guides nous examinerons le cas général où les axes de rotation ne sont pas dans un même plan. Soient (fig. 314) P_1 et P_2 les plans des cercles moyens des deux poulies O_1 et O_2, AB leur droite d'intersection sur laquelle nous choisissons deux points quelconques α et β. De chacun d'eux, nous menons aux cercles moyens les tangentes αA_1, αA_2, βB_1, βB_2, et nous

Digitized by Google

considérons les plans qu'elles déterminent comme les plans moyens de deux poulies-guides dont les circonférences moyennes auront les dispositions indiquées sur les figures.

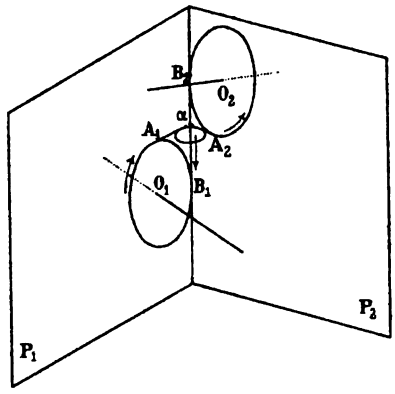


Fig. 315.

La courroie dont la ligne moyenne coïncide avec le contour $A_1A_2B_2B_1A_1$ permet alors de réaliser la transformation de mouvement demandée. Elle a la disposition indiquée sur la première figure 314 dans le cas où les deux rotations doivent être de même sens, et celle indiquée sur la figure suivante dans le cas contraire.

Cas particulier. — Dans le cas particulier où la ligne d'intersec-

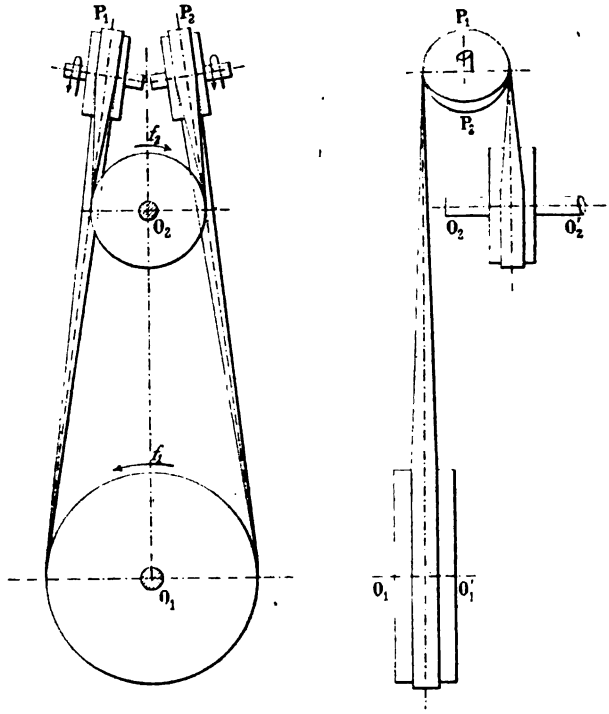


Fig. 316.

tion des plans moyens des deux poulies se trouve tangente aux deux

Digitized by Google

circonférences moyennes, figure 315, une seule poulie-guide est nécessaire pour assurer la transmission de mouvement.

Application. — *Établir une transmission par poulies entre deux arbres parallèles dans le cas où les plans moyens ne sont pas confondus.*

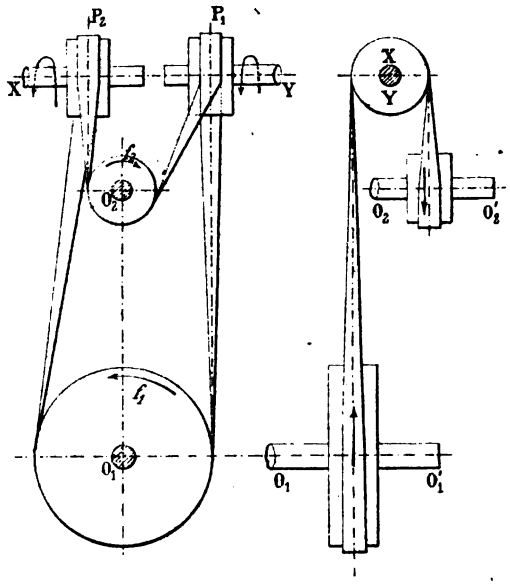


Fig. 317.

Pour avoir la solution complète du problème, nous examinerons deux cas :

a) *La courroie doit fonctionner dans les deux sens.* — La ligne d'intersection des plans moyens est alors rejetée à l'infini ; il en est par suite de même des points α et β. Les tangentes désignées précédemment par αA_1, βA_2 devenant parallèles, leur plan coïncide avec celui de la circonférence moyenne de l'une des deux poulies-guides et leur distance mesure son diamètre ; les deux autres tangentes βB_1, βB_2 déterminent de la même manière le diamètre et le plan moyen de la seconde poulie-guide. Il en résulte qu'il y a une infinité de procédés pour réaliser la transformation demandée. Pratiquement, on prend pour plan moyen des deux poulies-guides, les deux plans verticaux tangents à la fois aux deux poulies, et l'on obtient alors une disposition analogue à celle indiquée sur la figure 316.

b) *La courroie ne doit fonctionner que dans un seul sens.* — On adopte la disposition indiquée par les figures 317 et 318 et on la préfère à la précédente à cause de la plus grande facilité d'installation des poulies.

Digitized by Google

Les deux poulies-guides ont leurs plans moyens P_1 et P_2, qui coïn-

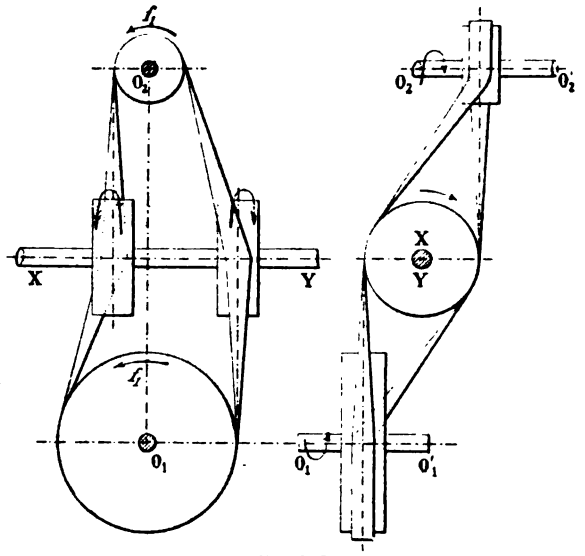


Fig. 318.

cident, par exemple, le premier avec un plan parallèle à la droite O_1O_2

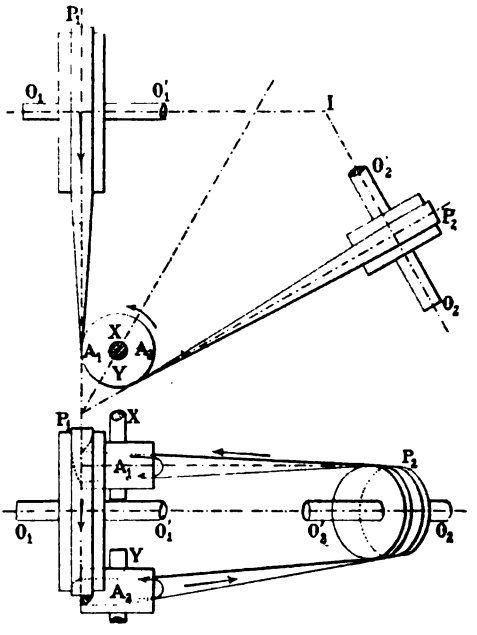


Fig. 319.

et tangent à la poulie O_1, le second, avec un plan parallèle à la même

Digitized by Google

direction et tangent à la poulie O_2. Comme de plus leurs axes sont parallèles, on peut à volonté les supposer folles sur un même arbre.

La figure 317 se rapporte au cas où les deux arbres de rotation O_1 et O_2 doivent tourner en sens contraires, la suivante au cas où ils doivent tourner dans le même sens.

Application. — *Établir une transmission par poulies entre deux arbres se coupant à distance finie.* — Les axes se coupant déterminent un plan H_1 que nous supposons horizontal. Les plans P_1 et P_2

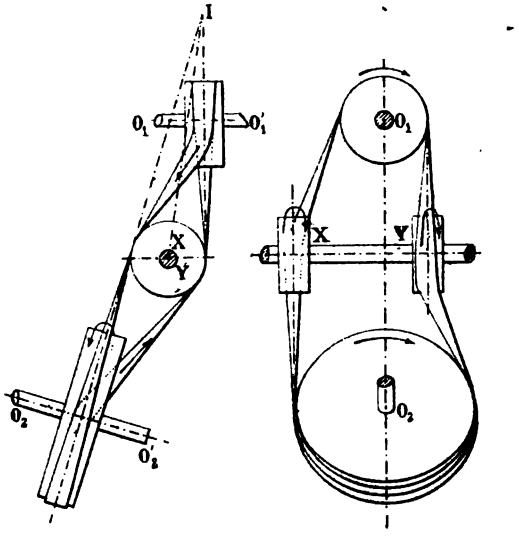


Fig. 320.

des cercles moyens des deux poulies sont alors verticaux et se coupent par conséquent suivant une verticale. Nous pouvons alors disposer les axes des deux poulies-guides A_1 et A_2 dans le prolongement l'un de l'autre, perpendiculairement au plan H_1 et dans le plan bissecteur du dièdre P_1, P_2. Comme d'autre part, nous avons montré comment on pouvait transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres rectangulaires ne se rencontrant pas, en adoptant la disposition correspondante de courroie, nous obtiendrons les deux transmissions de mouvement représentées sur les figures 319 et 320. La première est relative au cas où les poulies doivent tourner dans le même sens, la seconde au cas où elles doivent tourner en sens contraires.

232. Transmissions par cables textiles (1).

Les transmissions par câbles, fréquemment employées aujourd'hui,

(1) Corderies de la Seine (Le Havre).

Digitized by Google

présentent de nombreux avantages au point de vue de la facilité d'installation, de la sécurité et de l'économie.

La manille, le chanvre et le coton, matières textiles employées dans leur fabrication leur donnent des propriétés si différentes qu'il est utile de les connaître.

Le câble manille s'emploie de préférence pour les transmissions bien montées, à grandes poulies et à vitesse normale.

Dans le cas où la transmission est irrégulière ou très rapide, comme dans les machines électriques par exemple, on emploie le câble en chanvre et surtout le câble en coton.

a) **Diamètre des câbles.** — Le diamètre d'un câble est variable, le plus employé est celui de 50 millimètres ; en général on n'atteint pas 60 millimètres. L'on préfère augmenter le nombre de gorges des poulies et par suite celui des câbles, et utiliser des câbles de moindre diamètre.

b) **Distance des axes.** — La transmission est excellente tant que la distance des axes reste comprise entre 10 et 20 mètres.

c) **Diamètre des poulies.** — Les poulies utilisées dans de telles transmissions doivent avoir des diamètres supérieures à 1200 millimètres pour des câbles en chanvre blanc, à 1500 millimètres pour des câbles en manille de 60 millimètres.

La souplesse des câbles en coton conduit à des poulies d'un diamètre moindre.

d) **Sens de la marche. Flèches des câbles.** — Le sens de la transmission de mouvement correspond à celui qui permet de passer de la petite à la grande poulie.

En général les câbles ne sont pas tendus car on ne peut admettre

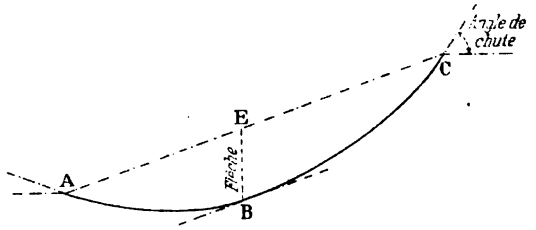


Fig. 321.

qu'ils sont dénués de poids. Ils suivent alors, en passant d'une poulie à l'autre une certaine courbe, connue sous le nom de chaînette qu'il est possible de remplacer pratiquement par un arc de parabole ; leur

Digitized by Google

flèche, proportionnelle à la distance des axes, étant de 4 à 6 pour 100 quand cette distance est de 15 mètres.

e) **Charge moyenne.** — On admet une charge moyenne de 8 kilomètres par mètre carré.

f) **Vitesse.** — En désignant par V la vitesse d'une poulie, par C sa circonférence et N le nombre de tours qu'elle fait en une minute, le déplacement du câble pendant ce temps est CN. Sa vitesse est donc :

$$V = \frac{CN}{60}.$$

g) **Formule nécessaire à la détermination du nombre de câbles pour une installation donnée.** — En désignant par P l'effort à transmettre, par R la charge moyenne, par x l'inconnue, la formule à appliquer est la suivante :

$$x = \frac{P}{V \times R}.$$

Le nombre des câbles est donc inversement proportionnel à la vitesse.

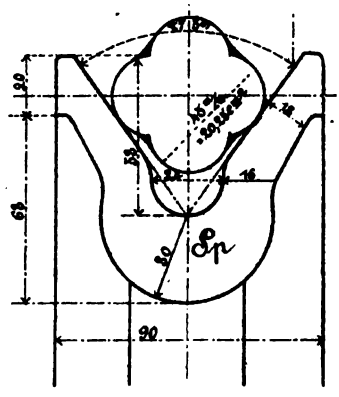


Fig. 322.

h) **Câbles carrés.** — La flexibilité limitée des câbles ronds, leur allongement inégal, et par suite l'obligation dans laquelle on se trouve de les raccourcir ont fait donner depuis quelque temps la préférence aux câbles carrés (fig. 322) non sujets aux inconvénients que nous venons de signaler.

233. Transmissions par cables métalliques.

Lorsque la distance des arbres devient supérieure à 20 mètres, on fait usage pour les transmissions de mouvement, de câbles métalliques qui travaillent non par traction, mais par leur propre poids. Elle ne doit pas toutefois dépasser 130 mètres, sans quoi il faut établir une ou plusieurs stations de poulies-supports ou décomposer la transmission en plusieurs autres.

Dans le premier cas, on est obligé de construire des pylônes et l'on dispose, comme l'indique la figure 323, les poulies-supports deux par deux l'une au-dessous de l'autre.

Digitized by Google

Dans le cas de la décomposition en petites transmissions, les stations intermédiaires comportent soit deux poulies clavetées sur le même arbre, soit une poulie à double gorge.

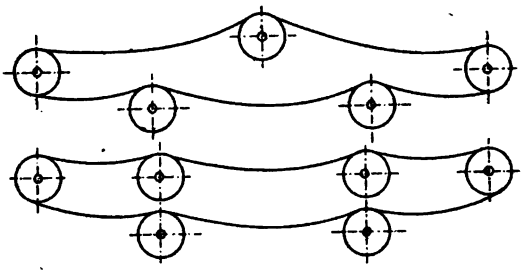


Fig. 323.

a) **Diamètre des poulies.** — Le diamètre d'une poulie doit être au moins égal à 150 fois celui du câble.

b) **Grosseur des câbles.** — Pour déterminer la grosseur des câbles on fait usage de la table suivante :

Avec une tension de :	30. 60. 70. 85. 100. 115. 130. 145. 160. 175. 190. 210. 235. k.
Il faut un câble de :	9. 10, 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. mm.
Avec une tension de :	245. 270. 300. 330. 360. 400. 443. k
Il faut un câble de :	22. 24. 26. 28. 30. 32. 34. mm.

c) **Gorge des poulies.** — La forme indiquée sur la figure 324 est

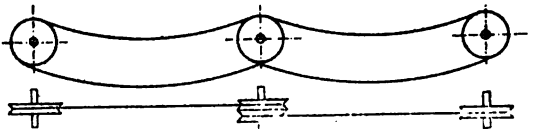


Fig. 324.

celle qu'on doit adopter pour la gorge des poulies. Son fond est muni d'une garniture en bois ou de préférence en cuir afin d'éviter le glissement du câble.

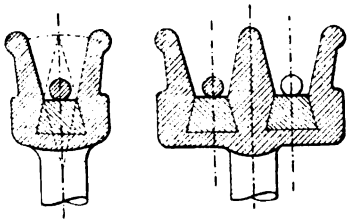


Fig. 325.

d) **Disposition des poulies.** — Les poulies doivent se mouvoir dans un même plan vertical si l'on ne veut pas que le câble saute en dehors des gorges.

e) **Sections des câbles métalliques.** — Un toron se compose de plusieurs fils tordus autour d'une âme métallique ou en chanvre. Plusieurs torons constituent un câble (fig. 326) ; leur torsion est inverse de celle donnée aux fils.

Digitized by Google

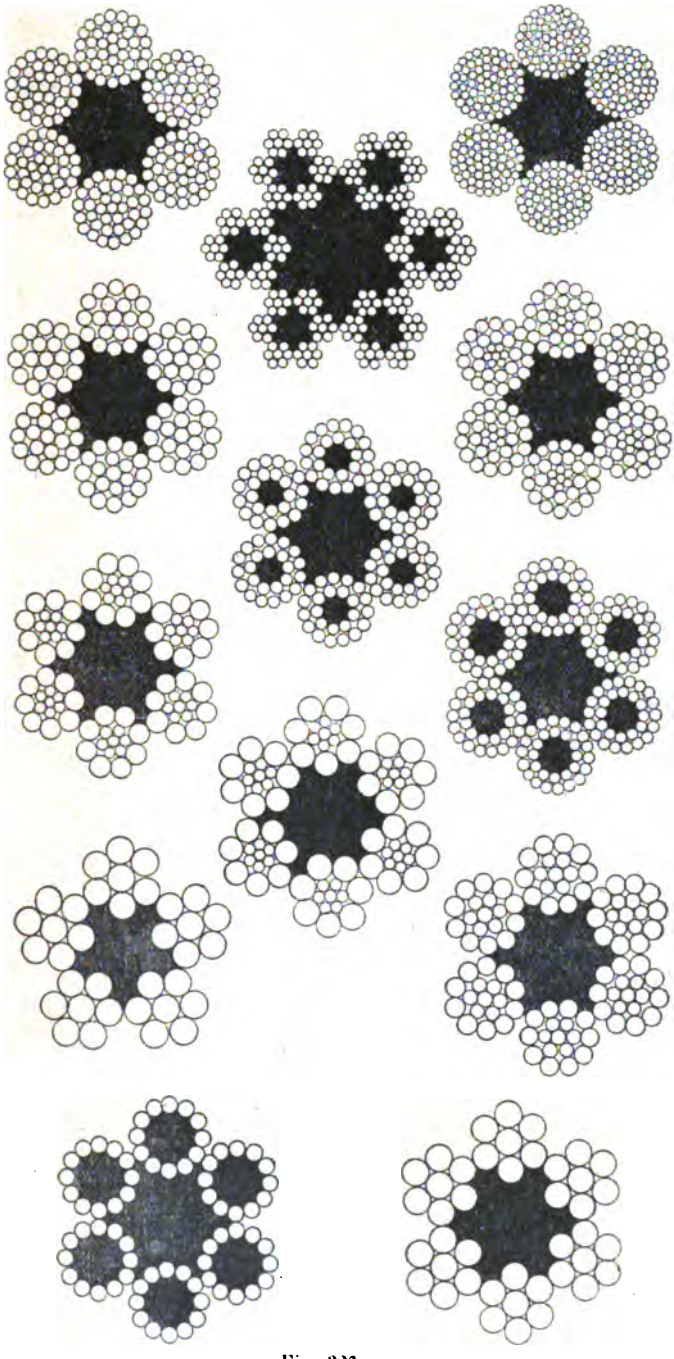


Fig. 326.

Digitized by Google

234. Transmissions par chaines.

Les grandes forces se transmettent avec vitesse modérée par l'intermédiaire de chaînes. La plus connue est la chaine dite de *Galle* représentée par la figure 327. Ses dents sont des fuseaux ; celles de la

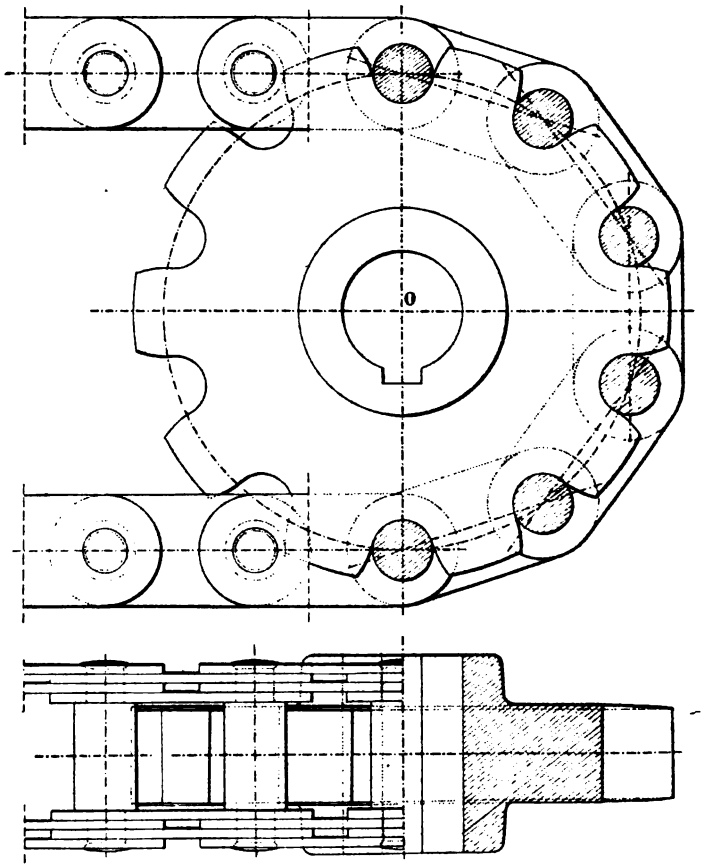


Fig. 327.

roue sont, comme nous l'avons établi § 26, à profils de développantes de cercle.

Pour les petites forces on se sert de la chaine de *Vaucanson*, (fig. 328); toutefois ses bouts de mailles étant simplement recourbés, elle offre peu de solidité.

Digitized by Google

Pour les automobiles on se sert beaucoup des chaînes à rouleaux

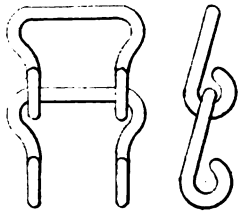


Fig. 328.

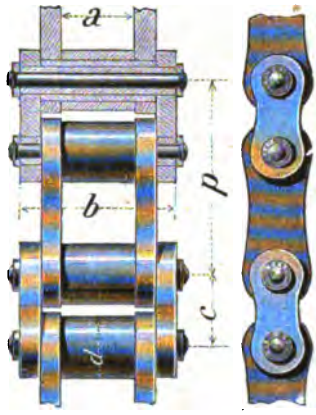


Fig. 329.

For Ever (fig. 329) et des chaînes silencieuses *Varietur* (fig. 330).

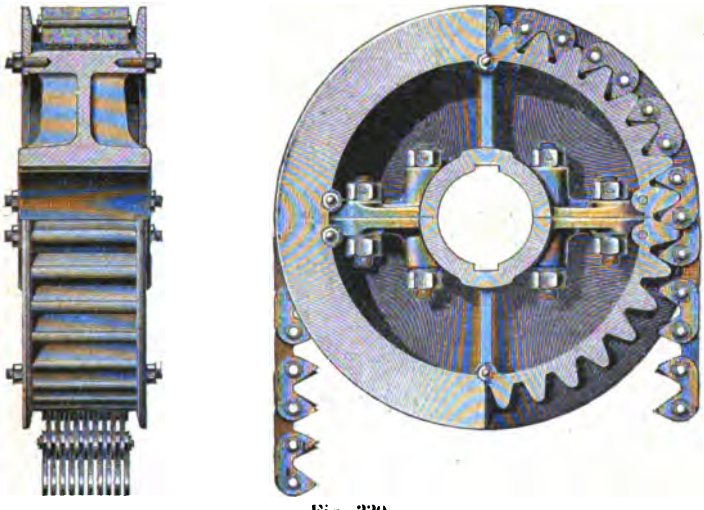


Fig. 330.

Les chaînes ordinaires en fer rond et à maillons ovales se rencontrent

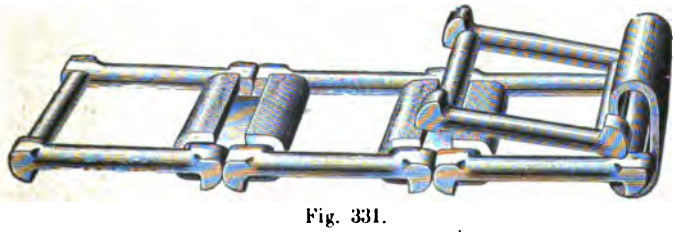


Fig. 331.

dans les appareils de levage ainsi que les chaînes *Simplex* à maillons détachables (fig. 331).

Digitized by Google

Les roues qui doivent recevoir les chaînes à maillons sont munies d'une rainure. Elle est simple ou double et les maillons ont l'une ou l'autre des dispositions indiquées (fig. 332).

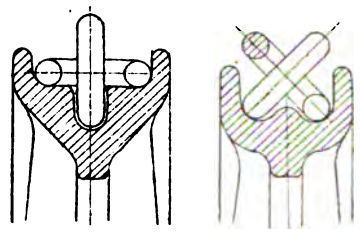


Fig. 332.

Elles affectent aussi la forme de la figure 333 dans le cas où l'on veut réduire la flexion sur chacun des maillons.

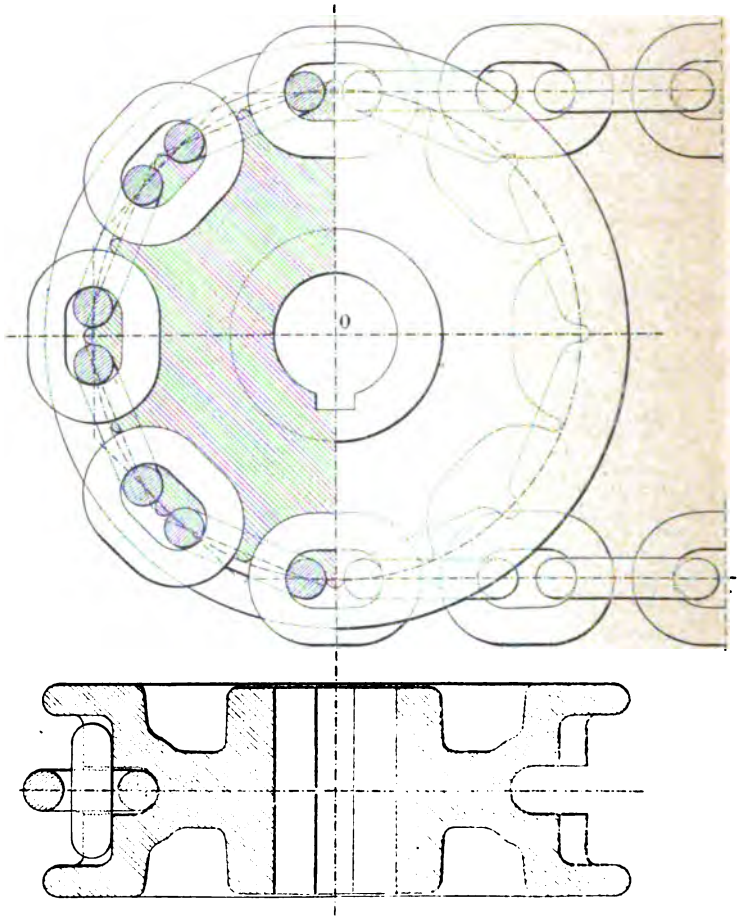


Fig. 333.

Digitized by Google

235. Transmission par cônes.

Dans les ateliers, pour communiquer à l'arbre à conduire une vitesse plus ou moins grande, on cale sur lui et sur l'arbre moteur deux cônes (fig. 335), formés l'un et l'autre d'une série de poulies venues de fonte d'une seule pièce; puis l'on dispose la courroie sur le couple de poulies qui permet d'obtenir pour l'arbre X'Y' à conduire, la vitesse la plus favorable au travail qu'on se propose d'exécuter.

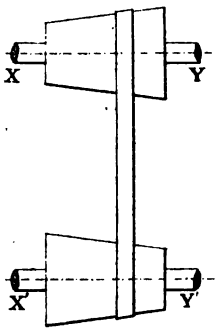


Fig. 334.

Il y a donc lieu de rechercher dans quel sens nous devons déplacer la courroie qui embrasse ces cônes pour que l'arbre à conduire X'Y' ait, par exemple, un mouvement accéléré, celui de l'arbre moteur XY étant uniforme.

Désignons à cet effet par ω et ω' les vitesses angulaires des arbres, par R et R' les rayons des deux poulies associées.

Entre ces quatre éléments existe la relation suivante :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'},$$

de laquelle nous déduisons :

$$\omega' = \omega \times \frac{R}{R'}.$$

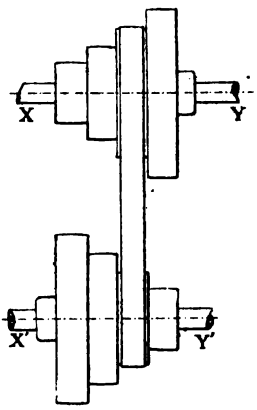


Fig. 335.

ω étant constant, pour que ω' croisse, il faut que le rapport $\frac{R}{R'}$ augmente, ou bien encore que R aille en croissant puisque les rayons R et R' varient en sens inverse.

L'arbre moteur tournant d'un mouvement uniforme, si nous voulons augmenter la vitesse de l'arbre à conduire, nous devrons donc déplacer la courroie sur l'arbre XY, dans le sens où les rayons des poulies vont en croissant.

Condition pour que la longueur d'une courroie ne change pas lorsqu'on fait varier les rayons des poulies. — a) *Courroie croisée.* — La formule (1) établie (§ 230) montre que la longueur d'une courroie croisée ne dépend que de la somme R + R' des

Digitized by Google

rayons : si donc, nous assujettissons cette somme à demeurer constante, il en sera de même de la longueur de la courroie.

b) *Courroie droite.* — Nous pouvons écrire l'expression de la longueur de la courroie droite :

$$L = 2\sqrt{d^2 - x^2} + \pi y + 2 \arcsin \frac{x}{d}.$$

En posant :

$$R_1 - R_2 = x, \qquad R_1 + R_2 = y.$$

La recherche des valeurs associables de R_1 et de R_2, pour que la longueur de la courroie demeure constante, revient alors à la résolution de l'équation précédente. Comme elle est transcendante, nous aurons recours à la méthode graphique.

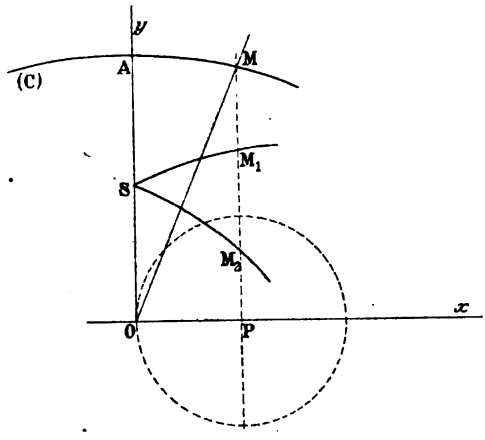


Fig. 336.

La courbe qui lui correspond est coupée en un seul point par une parallèle à l'axe des y ; elle est de plus symétrique par rapport à cet axe, car l'équation précédente ne se modifie pas par le changement de x en $-x$. Nous pouvons donc, pour étudier les variations de y, nous contenter de donner à la variable x des valeurs positives, inférieures toutefois à d pour que l'expression $d^2 - x^2$ soumise au radical reste positive. Comme, d'autre part, la dérivée de y, prise par rapport à x, a pour expression :

$$y' = -\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{d},$$

et reste constamment négative, la fonction y décroît à mesure que x augmente et la courbe (C) qui lui correspond a la forme indiquée par la figure 336.

c) *Courbes représentatives des variations de* R_1 *et* R_2. — Les équations précédentes conduisent aux valeurs suivantes :

$$R_1 = \frac{x + y}{2},$$

$$R_2 = \frac{y - x}{2}.$$

Digitized by Google

A une valeur OP de x correspond par exemple une ordonnée $y = PM$ de la courbe (C) et par suite les valeurs suivantes pour les rayons R_1 et R_2.

$$R_1 = \frac{OP + PM}{2},$$

$$R_2 = \frac{PM - OP}{2}.$$

Nous pouvons les construire facilement et les porter, la première de P en M_1, la seconde de P en M_2. En répétant cette construction un certain nombre de fois, et en joignant par un trait continu tous les points M_1 d'une part, tous les points M_2 d'autre part, nous obtiendrons deux courbes SM_1....., SM_2..... représentatives des variations R_1 et R_2. Elles se coupent sur l'axe des y au point S milieu du segment OA_1 car nous avons supposé que les poulies moyennes des deux cônes avaient même rayon.

d) *Recherche de* R_1 *et* R_2. — Pour déterminer les rayons R_1 et R_2 des poulies qu'il faut associer pour transmettre à l'arbre à conduire une vitesse angulaire ω_2, connaissant celle ω_1 de l'arbre moteur, nous devons satisfaire à l'équation :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2},$$

ou bien encore à la suivante :

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}.$$

Comme son premier membre est une constante connue K, avec la notation précédente, elle peut s'écrire :

$$\frac{y}{x} = k.$$

En sorte que le point M, précédemment arbitraire sur la courbe AM..., se trouve dans le cas qui nous occupe, à la rencontre de cette courbe avec la droite d'équation :

$$y = kx.$$

Aux deux points M_1 et M_2 trouvés précédemment correspondent alors les longueurs PM_1 et PM_2 des rayons R_1 et R_2.

Digitized by Google

Théorie de la poulie dans l'élévation des fardeaux.

Une poulie destinée à l'élévation des fardeaux (fig. 337) se compose d'un disque circulaire dont la surface latérale est percée d'une gorge dans laquelle vient s'engager une corde. A l'une de ses extrémités, on suspend le fardeau à soulever et à l'autre on applique la puissance.

La partie de corde comprise entre la poulie et le point d'attache du fardeau porte le nom de *garant*, l'autre celui de *courant*.

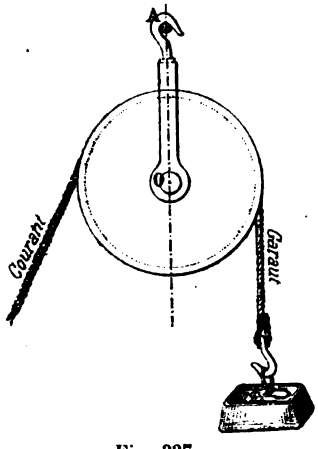


Fig. 337.

La poulie est de plus embrassée par une chape traversée par un tourillon dont l'axe coïncide avec celui de la poulie.

236. Poulie fixe. — Si nous fixons la chape au moyen d'un crochet A attaché à un clou, la poulie ne peut plus prendre qu'un mouvement de rotation autour de son axe et son déplacement longitudinal est nul.

Relation, à un même instant, entre les vitesses V_p *et* V_f *de la puissance et du fardeau.* — Si pendant le temps dt, le garant se raccourcit d'une longueur dH, le courant s'allonge de la même quantité et les vitesses V_p et V_f de la puissance et du fardeau, ont toutes deux pour expression $\frac{dH}{dt}$; elles sont donc égales.

237. Poulie mobile. — Si nous fixons le fardeau à la chape et si nous suspendons la poulie par l'intermédiaire d'une corde fixée à l'une de ses extrémités A et passant en B sur une poulie auxiliaire (fig. 338), elle ne peut prendre qu'un mouvement vertical de translation, d'où son nom de poulie *mobile*.

Relation, à un même instant, entre les vitesses V_p *et* V_f *de la puissance et du fardeau.* — A un instant t, désignons par l, la longueur de corde ACDB, par α son inclinaison sur la verticale, par R le rayon de la poulie mobile, par s la distance de son centre à l'horizontale AB et par δ la longueur du segment FB.

Digitized by Google

Nous pourrons alors écrire :

$$V_f = \frac{ds}{dt}, \qquad V_p = \frac{dl}{dt}.$$

Par suite :

$$\frac{V_p}{V_f} = \frac{dl}{ds}.$$

Pour évaluer ce rapport, nous allons exprimer l et s en fonction de l'angle α. Considérons à cet effet le triangle rectangle FGO, il donne :

$$s = FG \cot g\, \alpha.$$

Or :

$$FG = \delta - GB,$$

et

$$GB = \frac{R}{\cos \alpha}.$$

Par suite :

$$FG = \delta - \frac{R}{\cos \alpha},$$

et

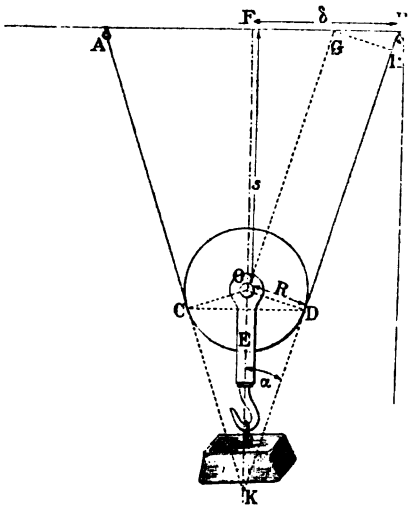


Fig. 338.

$$s = \left(\delta - \frac{R}{\cos \alpha}\right) \cot g\, \alpha = \delta \cot g\, \alpha - \frac{R}{\sin \alpha}. \qquad (1)$$

Pour obtenir l'expression de l, remarquons que la verticale qui passe par le centre de la poulie divisant la corde AEB en deux parties égales, nous pouvons écrire :

$$\frac{l}{2} = \widehat{ED} + BD,$$

et comme :

$$\widehat{ED} = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) R,$$

$$BD = BK - KD = \frac{\delta}{\sin \alpha} - R \cot g\, \alpha,$$

il en résulte que :

$$l = (\pi - 2\alpha) R + \frac{2\delta}{\sin \alpha} - 2R \cot g\, \alpha. \qquad (2)$$

Digitized by Google

En différentiant les équations (1) et (2), nous obtenons :

$$ds = \left(-\frac{\delta}{\sin^2\alpha} + \frac{R\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)d\alpha = \frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}(R\cos\alpha - \delta);$$

$$dl = \left(-2R - \frac{2\delta\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{2R}{\sin^2\alpha}\right)d\alpha = \frac{2\cos\alpha d\alpha}{\sin^2\alpha}(R\cos\alpha - \delta).$$

La relation que nous cherchons peut donc s'écrire :

$$\frac{V_p}{V_f} = 2\cos\alpha.$$

Nous pouvons d'ailleurs l'interpréter géométriquement. Considérons, à cet effet, le triangle isocèle COD, il donne :

$$CD = 2R\cos\alpha.$$

Par conséquent :

$$\frac{V_p}{V_f} = \frac{CD}{R}.$$

Cas particulier. — Dans le cas particulier où les deux brins de corde sont parallèles, la corde CD devient égale au diamètre de la poulie, et la relation précédente peut s'écrire :

$$V_p = 2V_f.$$

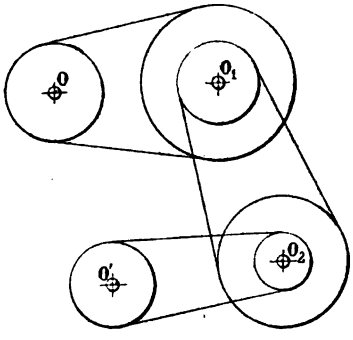


Fig. 339.

238. Equipage de poulies. — Lorsque les arbres entre lesquels on désire transmettre le mouvement sont à des distances par trop considérables, on peut faire usage d'un dispositif analogue au train de roues dentées et auquel on donne le nom *d'équipage de poulies* (fig. 339). Si nous conservons les conventions et notations employées dans ce cas et si nous supposons que l'équipage utilisé renferme seulement des courroies droites, sa raison a pour expression :

$$\frac{\omega_k}{\omega_0} = \frac{R_0R_1\ldots\ldots R_{k-1}}{r_1r_2\ldots\ldots r_k}.$$

Elle est donc égale au quotient du produit des rayons des poulies menantes par le produit des rayons des poulies menées.

239. Moufles, Mouflettes, Palans. — Une moufle est formée

Digitized by Google

par la réunion de plusieurs poulies montées sur une même chape. La figure 341 correspond à la *moufle proprement dite* : les poulies ont même rayon et sont montées sur le même axe ; la précédente correspond à la *mouflette* ou *moufle plate* : les poulies ont des rayons inégaux et sont montées sur des axes différents.

La réunion des poulies de deux moufles par l'intermédiaire d'une corde donne lieu à un *palan* (fig. 340). Pour l'utiliser dans l'élévation des fardeaux, on fixe la moufle supérieure et l'on suspend le fardeau à élever à la moufle inférieure.

Le palan est dit simple, double, triple..., suivant que chacune de ses chapes contient une, deux, trois poulies.

a) *Relation entre la vitesse de la puissance et la vitesse du fardeau.* — s désignant le chemin parcouru pendant le temps t par le centre de gravité du fardeau, nous pouvons écrire :

$$V_f = \frac{ds}{dt}.$$

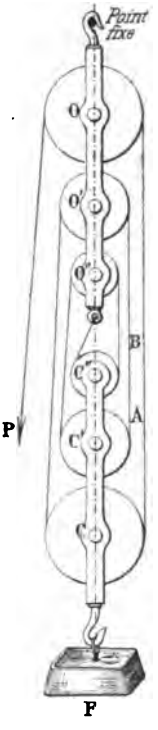


Fig. 340.

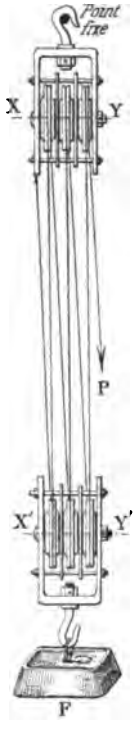


Fig. 341.

Comme d'autre part le centre de chaque poulie se déplace aussi de la longueur s, pendant le même temps, chaque brin de corde, en admettant qu'ils soient tous parallèles, se raccourcit de la même quantité. Si donc n désigne le nombre des poulies de chaque moufle $2ns$ mesurera le raccourcissement total de la corde et par suite le déplacement de la puissance. Sa vitesse a donc pour expression :

$$V_p = 2n \frac{ds}{dt} = 2nV_f.$$

c) *Expression de la vitesse de roulement à la circonférence de l'une quelconque des poulies.* — Supposons que le mouvement de la corde par rapport à l'une quelconque des poulies soit un roulement et recherchons dans ces conditions sa vitesse à la circonférence de l'une quelconque d'entre elles, C par exemple. Elle est évidemment égale à celle du brin AB qui, en conservant les notations précédentes se raccourcit de la longueur $3s$ pendant le temps t.

Digitized by Google

Par suite :

$$V = 3\frac{ds}{dt} = 3V_f.$$

Il en résulte que la vitesse circonférentielle d'une poulie quelconque, est égale à celle du fardeau multipliée par le nombre de brins de corde compris entre le point d'attache et la poulie considérée.

240. Equipage de palans. — Considérons n palans réunis entre eux comme l'indique la figure 342; le premier P_1 étant supposé fixe et tous les autres mobiles y compris le dernier auquel on attache le fardeau à soulever, proposons-nous de rechercher la relation qui existe, à un même instant, entre la vitesse de la puissance et celle du fardeau, sachant que le nombre de poulies de chaque moufle est égal à p.

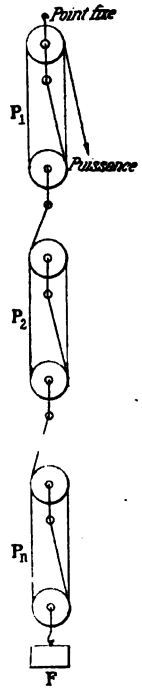


Fig. 342.

Désignons, à cet effet, par V_p, V_1, V_2, V_{n-1} V_f, les vitesses de la puissance et des palans P_2; P_3... P_n, qui peuvent être regardés successivement comme des fardeaux. Ainsi envisagés, ils permettent de poser les équations :

$$\frac{V_p}{V_1} = 2p,$$

$$\frac{V_1}{V_2} = 2p,$$

$$\frac{V_2}{V_3} = 2p,$$

$$\frac{V_{n-1}}{V_f} = 2p.$$

En multipliant ces équations membre à membre, nous obtenons la suivante :

$$\frac{V_p}{V_f} = (2p)^n.$$

qui n'est autre que la relation cherchée.

241. Palan de Whitte. — Les mouffles du palan de Whitte sont des poulies venues de fonte d'une seule pièce.

Précédemment, nous avons montré comment nous pouvions évaluer la vitesse circonférentielle de l'une quelconque des poulies, et nous

Digitized by Google

avons établi qu'elle était fonction de celle du fardeau. Dans le cas actuel comme les poulies d une même moufle tournent avec la même vitesse angulaire, il en résulte qu'il existe entre leurs rayons des relations que nous allons établir.

Désignons, à cet effet, par ω et ω' les vitesses des moufles O et O', par r_1, r_2, r_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3, les rayons des poulies qui les constituent.

En appliquant, à chacune d'elles, le théorème précédent, nous obtenons :

$$\omega'\rho_1 = V_f, \quad \omega'\rho_2 = 3V_f, \quad \omega'\rho_3 = 5V_f.$$

Par suite :

$$\frac{\rho_1}{1} = \frac{V_f}{\omega'},$$

$$\frac{\rho_2}{3} = \frac{V_f}{\omega'},$$

$$\frac{\rho_3}{5} = \frac{V_f}{\omega'}.$$

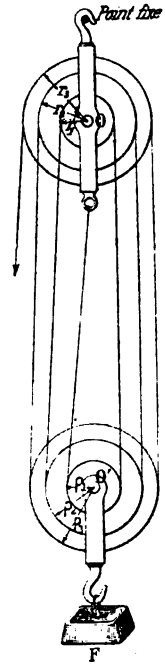


Fig. 343.

Les rayons ρ_1, ρ_2, ρ_3, sont donc liés par les relations:

$$\frac{\rho_1}{1} = \frac{\rho_2}{3} = \frac{\rho_2}{5},$$

autrement dit, ils sont *proportionnels aux nombres impairs* 1, 3, 5.

Des relations : $\omega r_1 = 2V_f$, $\omega r_2 = 4V_f$, $\omega r_3 = 6V_f$, nous déduisons de même :

$$\frac{r_1}{1} = \frac{r_2}{2} = \frac{r_3}{3}.$$

Autrement dit : *Les rayons de la moufle supérieure sont proportionnels à la suite naturelle des nombres entiers.*

242. Palan Moore. — Le palan Moore (fig. 344) se compose d'une poulie A à empreintes, à laquelle on communique un mouvement de rotation par l'intermédiaire d'une chaîne sans fin. Sur son axe se trouve calé un pignon R'' excentré qui engrène avec deux roues intérieures folles R et R', de même rayon, dont les nombres de dents diffèrent d'une unité et auxquelles correspondent par suite des pas P et P' inégaux : celui P'' de la roue R'' est pris égal à leur moyenne arithmétique. La

Digitized by Google

corde, aux extrémités de laquelle on suspend un plateau auquel on attache le fardeau à soulever, vient s'enrouler comme l'indique la figure sur deux poulies C et C′ solidaires des roues R et R′.

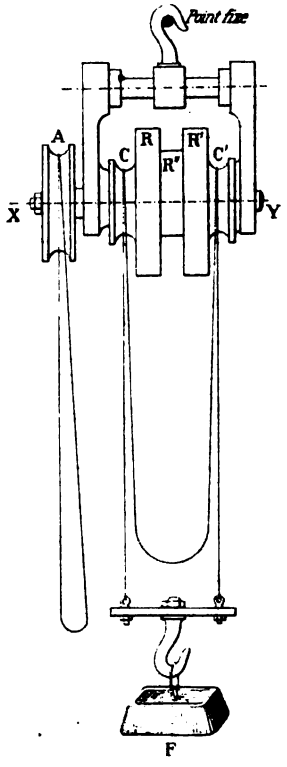


Fig. 344.

Relation entre la vitesse de la puissance et celle du fardeau. — Pour fixer les idées, supposons que les roues C et C′ aient respectivement 20 et 19 dents; le pas P est alors inférieur au pas P″ tandis que le pas P′ lui est supérieur.

Ceci posé, imaginons (fig. 345) que le pignon R″ tourne autour de son arbre de telle façon que l'une de ses dents en contact en I avec sa conjuguée ait cédé sa place à la suivante J. La dent L de la roue R vient alors en contact avec elle et comme les déplacements IJ et IL du point de contact sur les deux circonférences primitives sont inégaux, il s'est nécessairement produit un glissement relatif correspondant à l'arc KL et tel que :

$$\widehat{IK} = \widehat{IJ}.$$

Ce glissement, occasionné par les dents du pignon qui cherchent à pénétrer dans les creux de la roue, se traduit par une rotation de la roue dans le sens de la flèche *f* et correspond à un arc :

$$P'' - P = \frac{P + P'}{2} - P = \frac{P' - P}{2}.$$

Un raisonnement analogue, relatif à l'engrènement des roues R″ et R′, montre que le déplacement relatif de leur point de contact, se fait dans le sens de la flèche *f′* et a pour expression :

$$P' - P'' = P' - \frac{P + P'}{2} = \frac{P' - P}{2}.$$

Si donc nous imprimons un mouvement de rotation à la poulie A, elle le communique au pignon R″ et par suite aux roues R et R′ qui tournent alors dans un même sens. Le brin de corde auquel est attaché le fardeau descend, par exemple, tandis que l'autre monte, et dans le cas où

Digitized by Google

les pas sont égaux, le déplacement du fardeau est nul. Dans le cas actuel, il provient uniquement des mouvements relatifs du pignon par

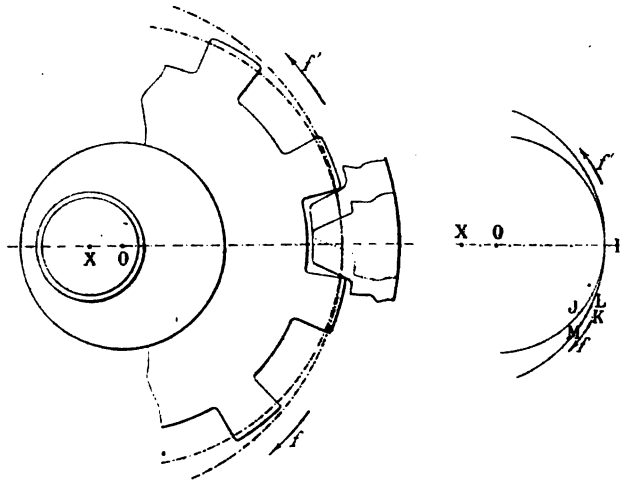


Fig. 345.

rapport aux roues et comme ils sont de sens contraires, les deux brins de corde se déplacent alors dans le même sens.

Pour évaluer la vitesse V_f du fardeau, désignons par ω la vitesse angulaire de la poulie A, par r son rayon, par Z, $Z+1$, Z'' les nombres de dents des roues R, R', R'', par R le rayon commun des deux premières et par ρ celui des deux poulies P et P'.

Nous pouvons alors écrire :

$$V_\rho = \omega r.$$

Pour une fraction de tour correspondant à l'arc P'', le pignon R'' imprime à la roue R un déplacement relatif $\frac{P' - P}{2}$; pour un tour complet, c'est-à-dire pour Z'' fractions de tour analogues à la précédente, son déplacement se traduit par l'arc $Z'' \cdot \frac{P' - P}{2}$ compté sur la circonférence de rayon R ou par l'arc $Z'' \cdot \frac{P' - P}{2R}$ compté sur la circonférence de rayon unité.

Pour un tour de la poulie A le déplacement du fardeau est donc :

$$\rho \cdot Z'' \cdot \frac{P' - P}{2R}.$$

Digitized by Google

Par suite :

$$V_f = \frac{\rho Z'' \cdot \frac{P' - P}{2R}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \rho \cdot Z'' \cdot \frac{P' - P}{2R} \cdot \frac{\omega}{2\pi}.$$

La relation cherchée entre la vitesse du fardeau et celle de la puissance est donc :

$$\frac{V_f}{V_p} = \frac{\rho \cdot Z''(P' - P)}{4\pi R r}.$$

Or :

$$P' = \frac{2\pi R}{Z}, \qquad P = \frac{2\pi R}{Z + 1}.$$

Par suite :

$$\frac{V_f}{V_p} = \frac{\rho Z''}{2rZ(Z + 1)}.$$

Remarque. — Si à un moment quelconque, la puissance cesse de s'exercer sur la poulie A, le fardeau reste en équilibre : une dent du pignon R'' se trouve en effet sollicitée en sens contraires par les deux roues R et R'.

Études de quelques mouvements différentiels.

243. Vis de Prony. — La vis de Prony (fig. 346) comprend deux parties filetées dans le même sens, mais dont les pas P et P' sont différents et deux écrous E, E' qui leur sont réciproques. Le premier est fixe;

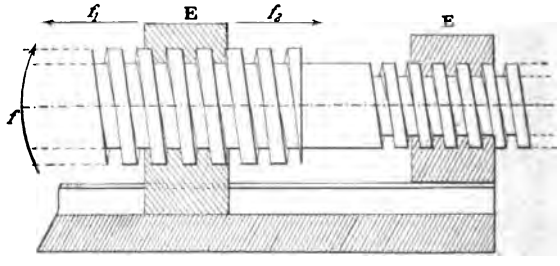


Fig. 346.

le second est guidé de manière à ne pouvoir prendre qu'un mouvement de translation parallèle à son axe et sa vitesse, qui dépend de la différence P—P', peut être rendue aussi petite que possible comme nous allons l'établir.

Imprimons, en effet, à la vis un mouvement de rotation dans le sens

Digitized by Google

de la flèche f, et faisons-la tourner de 360° par exemple. Comme l'écrou E est fixe, elle se déplace alors longitudinalement dans le sens de la flèche f_1 d'une longueur égale à P et entraîne avec elle l'écrou E′. Mais celui-ci, d'après la théorie exposée § 88 se déplace à son tour dans le sens de la flèche f_2 d'une longueur égale à P′. En sorte que si, pour fixer les idées, nous supposons $P > P'$, pour un tour de vis, l'écrou E′ se déplace vers la gauche d'une longueur $P - P'$. Si donc les pas des deux vis son peu différents, la différence $P - P'$ est très petite et l'écrou E′ prend un mouvement différentiel.

Dans le cas où $P = P'$ l'écrou E′ reste immobile ; il se déplace au contraire vers la droite si l'on suppose $P < P'$.

244. Vis à pas contraires. — Dans le tendeur d'attelage des wagons, on rencontre des vis à pas contraires (fig. 347) ; les deux déplacements simultanés que subit l'écrou au lieu d'être de sens contraires sont de même sens et pour un tour de vis l'écrou mobile se déplace alors de la longueur $P + P'$.

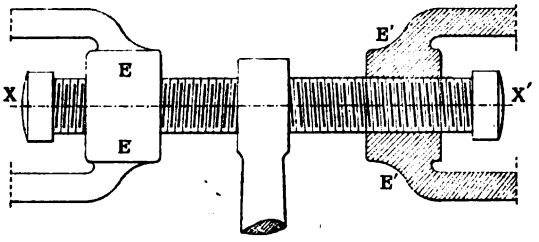


Fig. 347.

245. Palan différentiel. — Le palan différentiel représenté par la figure 348 se compose de deux moufles réunies par une même corde : la plus basse se réduit à une poulie à laquelle on suspend le fardeau à soulever ; la plus haute se compose de deux poulies de rayons r et R venues de fonte d'une seule pièce.

Relation entre la vitesse de la puissance et celle du fardeau. — Imaginons que les deux brins de corde AB, CD soient parallèles et que la puissance s'exerce au point E dans le sens indiqué par la flèche. La moufle supérieure prend alors un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω, par exemple, et nous pouvons écrire :

$$V_p = \omega . R.$$

D'autre part, comme pendant le temps dt, le brin CD se raccourcit de

Digitized by Google

la longueur $\omega R dt$, tandis que le brin AB s'allonge de la longueur $\omega r dt$, le raccourcissement de la corde ABCD est égal à $\omega (R - r) dt$ et celui des deux brins de corde AB et CD a pour expression :

$$\omega \frac{(R - r) dt}{2}.$$

Il en résulte que :

$$V_f = \frac{\omega (R - r)}{2}.$$

Par suite :

$$\frac{V_f}{V_p} = \frac{R - r}{2R}.$$

Si donc la différence $R - r$ est très faible, le fardeau se déplace très lentement.

Dans les mines, on fait usage d'un palan différentiel, un peu différent

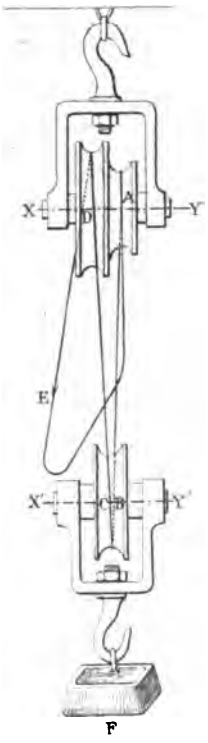


Fig. 348.

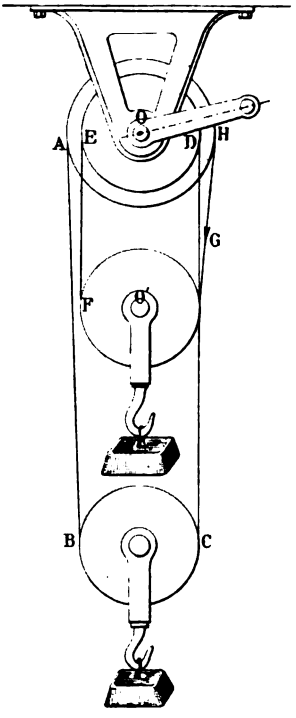


Fig. 349.

Fig. 350.

du précédent ; il est représenté par la figure 349 et permet à la fois d'élever un fardeau, et d'en descendre un autre. Actionnons, en effet, la

Digitized by Google

corde au point G dans le sens de la flèche, la poulie mobile O″ s'élève alors comme nous venons de le voir, tandis que le brin de corde HG s'allongeant de la longueur $\omega R dt$, et le brin EF se raccourcissant de la longueur $\omega R dt$, la corde HGEF s'allonge de la longueur $\omega (R - r) dt$.

La poulie O′ descend donc pendant que la poulie O″ monte et, à un même instant, leurs vitesses sont égales.

246. Treuil différentiel. — Le tambour du treuil différentiel se compose de deux cylindres de rayons R et r sur chacun desquels l'on fixe l'une des extrémités d'une corde que l'on enroule ensuite dans des

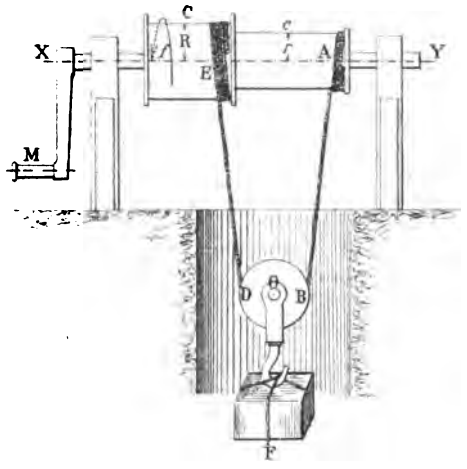


Fig. 351.

sens différents ; comme l'indique la figure 351, elle soutient une poulie mobile à laquelle on suspend le fardeau à soulever.

Relation entre la vitesse de la puissance et celle du fardeau.— Pour fixer les idées, désignons par L le rayon de la manivelle motrice, et par ω la vitesse angulaire du tambour ; nous pouvons alors écrire :

$$V_p = \omega \cdot L.$$

La rotation du treuil s'effectuant par exemple dans le sens de la flèche *f*, pendant le temps *dt* le brin de corde ED se raccourcit de la longueur $\omega R dt$, tandis que le brin AB s'allonge de la longueur $\omega r dt$. Comme nous avons supposé $R > r$, le raccourcissement total du brin ABCD a pour expression :

$$\omega (R - r) dt,$$

Digitized by Google

et comme nous pouvons toujours supposer les deux brins de corde parallèles, le racourcissement de chacun d'eux a pour valeur :

$$\frac{\omega(R-r)}{2}dt.$$

Il en résulte qu'à l'instant considéré la vitesse du fardeau a pour expression :

$$V_f = \frac{\omega(R-r)}{2}$$

La relation cherchée peut donc s'écrire :

$$\frac{V_f}{V_p} = \frac{R-r}{2L}.$$

Elle est analogue à celle trouvée dans le cas du palan différentiel.

247. Machine à aléser horizontale. — Une machine à aléser (fig. 352) permet de rendre parfaitement régulière la surface intérieure d'un cylindre.

Le cylindre C à aléser est fixe et disposé de telle façon que son axe XY coïncide avec celui d'un arbre creux auquel on peut communiquer ainsi qu'au disque porte-outil un mouvement de rotation au moyen des

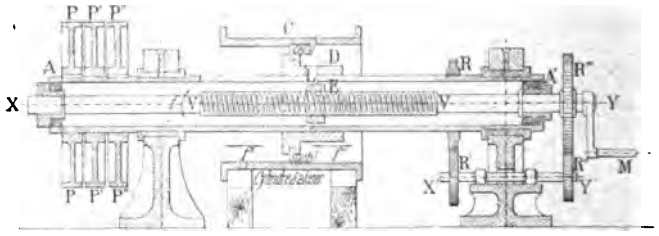


Fig. 352.

poulies P, P″, sur lesquelles on dispose à volonté par l'intermédiaire de la poulie folle P′ ou une courroie droite, ou une courroie croisée.

Le disque porte-outil D se trouve invariablement lié, par l'intermédiaire d'une languette L qui vient s'engager dans une rainure longitudinale pratiquée dans l'arbre creux, à un écrou E, solidaire d'une vis V. Cette dernière, astreinte à pouvoir seulement tourner autour de son axe, peut recevoir son mouvement d'un train de roues dentées R, R′, R″, R‴, disposées comme l'indique la figure, et ayant respectivement Z — 1, Z′, Z′ et Z dents.

Ceci posé, communiquons au cylindre creux un mouvement de rotation de sens f et de vitesse angulaire ω.

Digitized by Google

Le disque D se met aussitôt en mouvement, tourne dans le même sens et force l'écrou E à se déplacer dans le sens de la flèche f' avec une vitesse égale à :

$$V = \frac{p\omega}{2\pi}.$$

Mais la vis V tourne elle aussi, dans le même sens que le cylindre creux, avec une vitesse angulaire ω' qui a pour expression :

$$\omega' = \omega \frac{(Z-1)Z'}{Z' \cdot Z} = \omega \cdot \frac{Z-1}{Z}.$$

Elle communique à l'écrou un second mouvement de translation parallèle à son axe, de sens f'', et de vitesse :

$$V' = \frac{p\omega}{2\pi} \cdot \frac{Z-1}{Z}.$$

Sous l'influence de ces deux mouvements simultanés, le disque porte

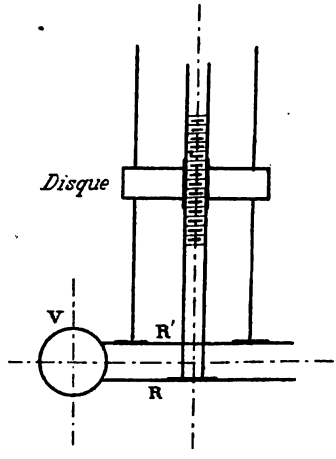


Fig. 353.

outil prend donc un mouvement de translation résultant, dont la vitesse, à l'instant considéré :

$$V - V' = \frac{p\omega}{2\pi}\left(1 - \frac{Z-1}{Z}\right) = \frac{p\omega}{2\pi} \cdot \frac{1}{Z},$$

est d'autant plus faible que le nombre Z est plus grand. Il est donc animé à la fois, d'un mouvement de rotation autour de l'axe XX' et d'un mouvement très lent de translation parallèle à cet axe.

Digitized by Google

A fin de course, on peut le ramener dans sa position première par l'intermédiaire de la manivelle M, après avoir déplacé longitudinalement, les roues R′ et R″ de façon qu'elles n'engrènent plus avec leurs conjuguées.

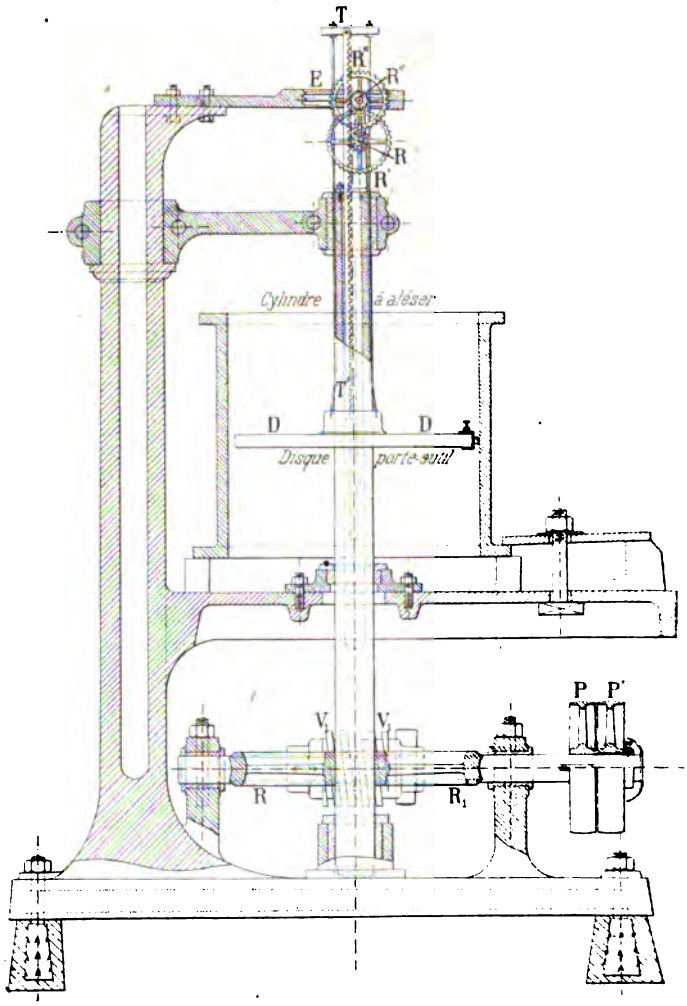


Fig. 354.

Dans certaines machines, on communique au disque porte-outil un mouvement différentiel au moyen de la disposition indiquée sur la figure 353. Une vis tangente engrène avec deux roues R et R′ ayant respectivement n et $n+1$ dents. Comme précédemment l'écrou, soli-

Digitized by Google

daire du disque, prend deux mouvements de translation simultanés de sens contraires dont les vitesses ont pour expressions :

$$\frac{p\omega}{2\pi n} \quad \text{et} \quad \frac{p\omega}{2\pi(n+1)},$$

ω désignant la vitesse angulaire de la vis.

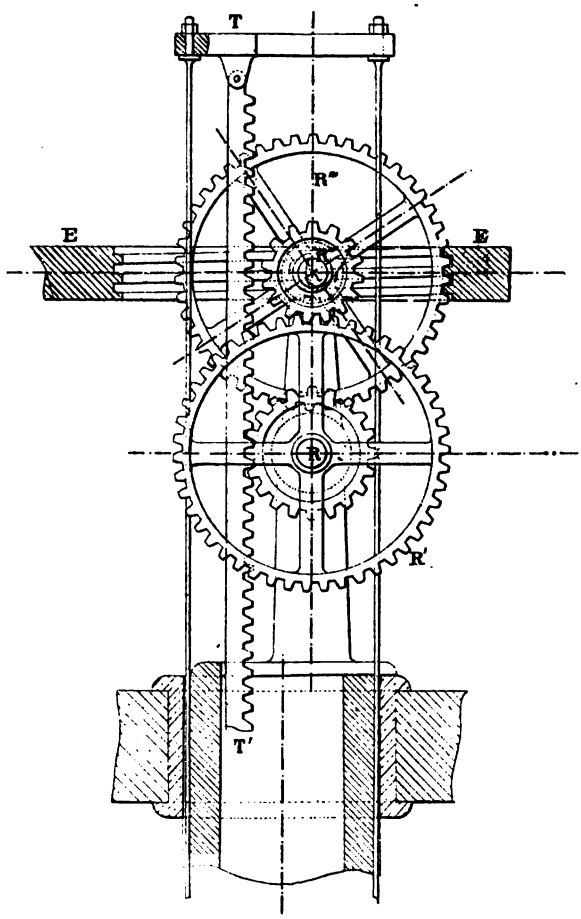


Fig. 335.

La vitesse du mouvement résultant :

$$V = \frac{p\omega}{2\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{p\omega}{2\pi} \cdot \frac{1}{n(n+1)},$$

peut donc être rendue aussi petite que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

Digitized by Google

248. Machine à aléser verticale. — Le principe sur lequel repose la machine à aléser verticale (fig. 354 et 355) est le même que le précédent. Les deux machines diffèrent cependant l'une de l'autre par la manière même dont se fait la transmission du mouvement différentiel au disque porte-outil.

Le disque D est supporté verticalement par des tiges invariablement liées à une crémaillère TT', qui reçoit un mouvement rectiligne alternatif par suite de son engrènement avec une roue R qui appartient à un train de roues dentées R, R', R'', R''' dont les axes sont solidaires de l'arbre creux et tournent, par suite, avec lui. La roue R''' engrenant avec un écrou fixe E, son mouvement de rotation autour de l'axe de cet écrou l'oblige à tourner sur elle-même, et par suite du dispositif, à communiquer son mouvement à la roue R, laquelle à son tour oblige la crémaillère à se déplacer longitudinalement.

Digitized by Google

DEUXIÈME CLASSE

APPAREILS OÙ LE SENS DE LA TRANSMISSION EST CONSTANT ET OÙ LE RAPPORT DES VITESSES DES ORGANES EN LIAISON EST CONSTANT.

—

CHAPITRE II

ÉTUDE DE QUELQUES TREUILS

—

249. Treuil ordinaire. — Le treuil est un mécanisme destiné à transformer un mouvement circulaire continu, en un mouvement rectiligne alternatif.

Il se compose (fig. 356) d'un tambour circulaire T de rayon R que l'on peut mettre en mouvement par l'intermédiaire de la manivelle M de rayon l et sur lequel vient s'enrouler une corde fixée sur lui par l'une de ses extrémités et portant à l'autre le fardeau à soulever.

Relation entre la vitesse de la puissance et celle du fardeau. — A l'instant considéré, désignons par ω la vitesse angulaire de l'arbre XY. La vitesse V_f du fardeau, évidemment la même que celle du brin de corde qui vient s'enrouler sur le tambour, a donc pour valeur :

$$V_f = \omega \cdot R.$$

D'autre part, le déplacement de la puissance correspondant à celui d'un mobile animé d'un mouvement circulaire de vitesse angulaire ω sur une trajectoire de rayon l, nous pouvons écrire :

$$V_p = \omega \cdot l.$$

Digitized by Google

La comparaison de ces deux équations conduit finalement à la suivante :

$$\frac{V_f}{R} = \frac{V_p}{l}.$$

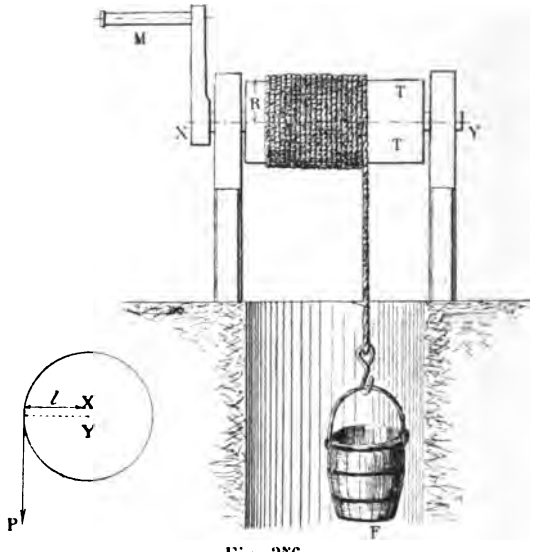


Fig. 356.

Elle exprime que dans un treuil simple, *les vitesses de la puissance et du fardeau sont entre elles comme les rayons de la manivelle et du tambour.*

250. Treuil composé à double engrenage. — Sur un arbre XY (fig. 357), auquel on communique un mouvement de rotation par l'intermédiaire d'une manivelle M de rayon l, se trouvent calées deux roues, r_1 et r_2 qui peuvent engrener respectivement avec deux autres roues R_1 et R_2 calées sur un arbre X'Y' parallèle au premier et que l'on peut déplacer longitudinalement. Sur un tambour T de rayon r', fou sur l'axe XY et solidaire d'une roue R qui engrène avec la roue r calée sur X'Y', vient s'enrouler la corde destinée à soulever le fardeau.

Comme l'indique la figure la hauteur de la roue r est déterminée de telle façon que les deux roues r et R engrènent ensemble quel que soit le couple $(r_1 . R_1)$, $(r_2 . R_2)$ qui transmet le mouvement de rotation de l'arbre XY à l'arbre X'Y'.

Relation entre la vitesse de la puissance et celle du fardeau. — Pour obtenir la relation qui existe, à un même instant, entre les vitesses de la puissance et celle du fardeau ; désignons par ω et ω' les

Digitized by Google

vitesses angulaires de la manivelle et du tambour. Nous pouvons alors écrire :

$$V_p = \omega \cdot l,$$

$$V_f = \omega' \cdot r'.$$

Par suite :

$$\frac{V_f}{V_p} = \frac{\omega'}{\omega} \cdot \frac{r'}{l}.$$

Mais le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, qui représente la raison du train de roues dentées r_2, R_2, r, R, a pour expression :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{r_2 \cdot r}{R_2 \cdot R}.$$

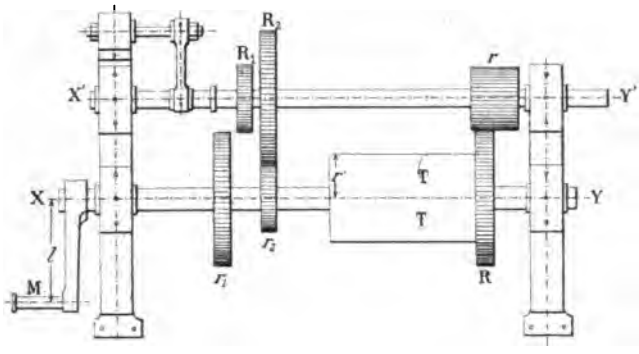


Fig. 357.

La relation cherchée peut par suite s'écrire :

$$\frac{V_f}{V_p} = \frac{r'}{l} \cdot \frac{r_2 r}{R_2 R} = \frac{r'r}{lR} \cdot \frac{r_2}{R_2},$$

ou bien encore :

$$\frac{V_f}{V_p} = \frac{r'r}{lR} \cdot \frac{r_1}{R_1}.$$

dans le cas où ce sont les roues r_1 et R_1 qui engrènent ensemble.

Comme nous avons supposé $\frac{r_1}{R_1} \neq \frac{r_2}{R_2}$, avec un treuil à double engrenages, nous pouvons communiquer au fardeau deux vitesses différentes, suivant que nous faisons engrener le couple de roues (r_2, R_2), ou le couple (r_1, R_1) ; dans le second cas le fardeau monte plus vite que dans le premier.

251. Treuil employé dans les mines. — Le tambour du treuil employé dans les mines (fig. 358) présente la forme d'une bobine à

Digitized by Google

bords relevés de manière à empêcher le glissement du câble plat qui vient s'enrouler sur lui, et à l'une des extrémités duquel se trouve attaché le fardeau à soulever.

Expression du déplacement δ *du fardeau après n tours de tambour.* — Désignons par r le rayon du tambour à l'origine des n tours et par e l'épaisseur du câble.

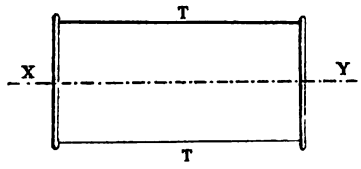


Fig. 358.

Après le premier tour, le câble s'est raccourci de $2\pi r$.

Au commencement du second tour le rayon du tambour étant devenu $r+e$, à la fin il s'est enroulé sur lui une longueur de câble égale à $2\pi\,(r+e)$.

En raisonnant ainsi de proche en proche, nous concluons facilement que

$$2\pi\,[r+(n-1)e],$$

représente la longueur de câble enroulée pendant le $n^{ième}$ tour du tambour.

Par suite :

$$\delta = 2\pi r + 2\pi\,(r+e) + 2\pi\,(r+2e) + 2\pi\,[r+(n-1)\,e],$$

ou :

$$\delta = 2\pi rn + 2\pi e\,[1+2+3+\ldots\ldots+n-1],$$

$$\delta = 2\pi n\left[r+\frac{(n-1)e}{2}\right].$$

Si nous convenons de regarder e, comme un nombre algébrique, positif dans le cas de l'enroulement, négatif dans le cas contraire, la formule à laquelle nous venons de parvenir sera tout à fait générale.

Digitized by Google

CHAPITRE III

COMPTEURS DE TOURS, CINÉMOMÈTRES ET TACHYMÈTRES

252. Dans l'industrie, la mesure des vitesses angulaires des arbres de rotation se fait à l'aide de compteurs de tours, de cinémomètres ou bien encore de tachymètres.

Compteurs de tours.

253. Les compteurs de tours sont des instruments que l'on met directement en relation avec l'arbre dont on veut évaluer la vitesse angulaire et qui enregistrent chacun de ses tours au fur et à mesure qu'ils se produisent.

Ils peuvent se classer en deux groupes :

1° Compteurs de tours sans compte-secondes ;

2° Compteurs de tours avec compte-secondes.

Comme ils sont fort nombreux, dans l'étude qui va suivre, nous nous bornerons à la description d'un appareil de chacune de ces catégories.

254. Compteur de tours Schaeffer et Budenberg. — Le mécanisme du compteur de tours Schaeffer et Budenberg est une application de la roue et vis sans fin. Il se compose de deux roues de même diamètre, folles sur le même axe et placées l'une au-dessous de l'autre comme l'indique la figure 359. Elles portent l'une 100 dents, l'autre 99 et engrènent toutes deux avec une même vis sans fin rendue solidaire de l'arbre moteur dont on veut évaluer la vitesse angulaire.

La roue supérieure R_1 porte deux graduations de cent divisions chacune et les déplace dans son mouvement devant une grande aiguille fixe ; une division de la plus grande correspond à un tour de l'arbre moteur et une division de la plus petite à cent tours du même arbre.

Digitized by Google

La roue inférieure R_2 constitue, comme nous allons l'établir, un totalisateur. Elle est invariablement liée à une petite aiguille qui parcourt les divisions de la seconde graduation.

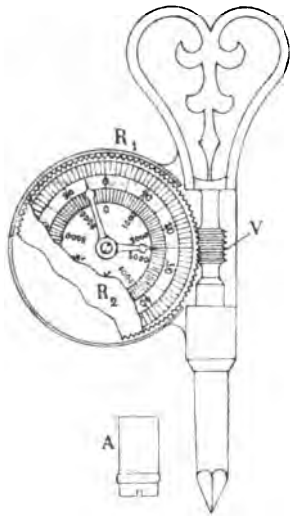


Fig. 359.

De cette disposition, il résulte que la roue R_1 qui avance d'une dent par tour de vis, ramène, au bout de cent tours, le zéro des deux graduations devant l'extrémité de la grande aiguille. La petite aiguille, dans les mêmes conditions, s'est avancée de cent dents ; elle a donc fait un tour complet plus un quatre-vingt-dix-neuvième de tour et son extrémité est venue se placer sur la division 1 de la petite graduation.

La petite aiguille de l'instrument permet donc d'apprécier, à un instant, les centaines de tours faits par l'arbre moteur ; la grande au contraire indique les dizaines et les unités.

255. Compteur de tours Deschiens. — Le mécanisme du compteur de tours Deschiens (fig. 360) est une application des engrenages intermittents. Il se compose d'une suite de tambours T_1, T_2, ... de même rayon, fous sur un même axe et portant sur leurs contours, à intervalles réguliers, la suite naturelle des nombres de 0 jusqu'à 9 ; une série de fenêtres ménagées dans le boîtier de l'instrument et en regard de chacune des roues laisse entrevoir un nombre qui correspond au nombre de tours effectués par l'instrument pendant une période de temps égale à celle qu'indique le compteur à secondes qui accompagne l'appareil.

Le bord de droite de chaque tambour présente dix dents ; celui de gauche au contraire présente une simple échancrure dont la disposition est la même par rapport au zéro de la graduation quel que soit le tambour considéré.

Un arbre parallèle à celui des tambours porte une série de petits pignons P_1, P_2,... dont les dents de deux en deux sont taillées sur la moitié de la hauteur seulement et dont les dimensions sont calculées de façon que l'arc de conduite de l'un des engrenages (T_i, P_i) soit de $\frac{1}{10}$ de tour.

Le premier tambour est relié à l'arbre moteur au moyen d'une étoile dont les dents s'engagent dans les creux de sa denture et qui reçoit,

Digitized by Google

par l'intermédiaire d'un excentrique, un mouvement oscillatoire dont l'amplitude correspond, pour chaque tour de l'arbre moteur, à une division du tambour.

De cette disposition, il résulte qu'à chaque tour de l'arbre moteur correspond $\frac{1}{10}$ de tour du premier tambour T_1, si bien qu'après dix déplacements consécutifs son échancrure de gauche vient en prise avec une longue dent du pignon P_1. Comme de l'autre côté cette même dent

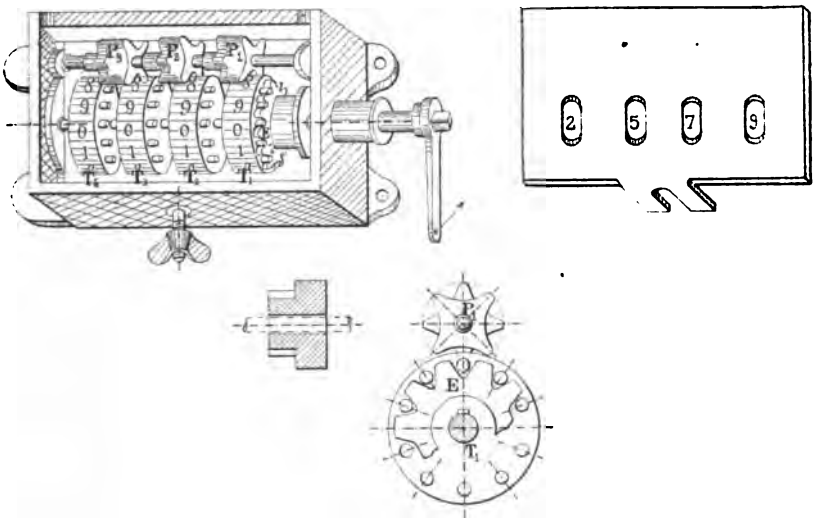


Fig. 360.

se trouve engagée dans un creux de la denture du tambour T_2, ces deux tambours sont rendus solidaires et cela pour une période de temps égale à celle qui correspond à $\frac{1}{10}$ de tour de l'arbre moteur. Le tambour T_2 avance donc d'une dent ; après quoi le pignon P_1 se trouve immobilisé par suite de la rencontre de sa denture avec le contour du tambour T_1 et comme l'une de ses petites dents se trouve engagée dans un creux de la denture du second tambour, celui-ci se trouve aussi immobilisé jusqu'à ce que l'échancrure du premier tambour vienne de nouveau en prise avec une dent du petit pignon. Le phénomène se reproduit ensuite constamment après chaque période de dix tours de l'arbre moteur.

Le raisonnement que nous venons de faire pour le couple d'organes (T_1 . P_1) est valable pour les autres couples ; en sorte que les chiffres présentés devant chaque fenêtre du boîtier par les tambours T_1, T_2, T_3, ...

Digitized by Google

correspondent aux unités, dizaines, centaines, ... du nombre de tours effectués par l'arbre moteur.

Un second boîtier adjacent à celui qui contient le mécanisme renferme un chronomètre qui se met en mouvement en même temps que le compteur de tours proprement dit et l'instrument permet ainsi d'apprécier le nombre de tours effectués par l'arbre d'une machine pendant un temps déterminé.

Cinémomètres.

Les cinémomètres sont des instruments qui font connaître le nombre de tours effectués par une machine en mouvement de rotation.

256. Cinémomètre Duveau. — Le cinémomètre Duveau (fig. 361) comprend deux plateaux circulaires P_1 et P_2 parallèles : le premier tourne dans le sens de la flèche f_1 autour d'un axe O_1 perpendiculaire à son plan avec une vitesse angulaire ω_1 égale à celle de l'arbre dont on étudie le mouvement ; le second tourne en sens inverse du précédent c'est-à-dire dans le sens de la flèche f_2 autour d'un arbre O_2 parallèle au premier avec une vitesse angulaire constante ω_2.

Une molette M, placée à l'extrémité d'une manivelle OM calée sur un arbre O parallèle aux précédents et équidistant de chacun d'eux, se trouve disposée entre les deux plateaux P_1 et P_2 et reçoit de ce fait autour de l'axe O, deux mouvements de rotation de sens contraires. Au bout d'un certain temps, elle finit par prendre une position d'équilibre d'autant plus éloignée de la perpendiculaire CM_0 élevée au point C au segment O_1O_2 que la différence $\omega_1 - \omega_2$ est plus grande.

Pour l'établir, désignons par $2a$ la distance O_1O_2 des deux arbres de rotation O_1 et O_2, par b le rayon de la manivelle OM, par M la position d'équilibre de la molette sur sa trajectoire et par α l'angle $\widehat{M_0OM}$.

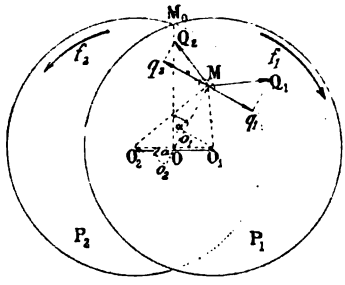


Fig. 361.

Le vecteur (MQ_1), perpendiculaire à la droite O_1M et égal à $\omega_1 \times O_1M$, correspond à la vitesse que communique à la molette M le plateau P_1 et donne naissance à deux autres vecteurs (Mq_1), (Mp_1) qui sont portés : le premier par la tangente en M à la circonférence OM trajectoire de la molette ; le second par la normale à cette même courbe.

Digitized by Google

Par analogie, le vecteur (MQ_2), égal à $\omega_2 \times O_2M$ et perpendiculaire à la droite O_2M, correspond à la vitesse que communique à la molette M le plateau P_2 et donne naissance à deux autres vecteurs (Mq_2) et (Mp_2) portés par les mêmes droites que les précédents.

Il en résulte que la molette M se déplace sur sa trajectoire sous l'influence de deux mouvements simultanés qui lui communiquent deux vitesses contraires (Mq_1) et (Mq_2) et comme nous avons supposé qu'elle était en équilibre dans cette position, c'est que :

$$(Mq_1) = (Mq_2).$$

Pour traduire algébriquement cette condition d'équilibre, projetons les points O_1 et O_2 en o_1 et o_2 sur la droite OM et considérons les deux groupes de triangles semblables Mq_1Q_1 et O_1o_1M, Mq_2Q_2 et O_2o_2M ; ils donnent :

$$Mq_1 = \omega_1 \times o_1M,$$

$$Mq_2 = \omega_2 \times o_2M.$$

Par suite :

$$\omega_1 \times o_1M = \omega_2 \times o_2M.$$

Comme :

$$o_1M = b - a \sin \alpha,$$

$$o_2M = b + a \sin \alpha,$$

l'équation d'équilibre peut finalement s'écrire :

$$\omega_1 (b - a \sin \alpha) = \omega_2 (b + a \sin \alpha).$$

Elle donne :

$$\sin \alpha = \frac{b}{a} \cdot \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{b}{a} \frac{\omega_1 - \omega_2}{(\omega_1 - \omega_2) + 2\omega_2},$$

ou bien encore :

$$\sin \alpha = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{2\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}}.$$

Il en résulte que l'angle α croît en même temps que la différence $\omega_1 - \omega_2$; il est donc d'autant plus grand que la vitesse angulaire ω_1 l'est elle-même.

La molette M est solidaire d'une aiguille qui se déplace devant un quadrant gradué par comparaison et qui indique pour chacune de ses positions d'équilibre le nombre de tours faits par minute par l'arbre dont on étudie le mouvement.

257. Cinémomètre Richard. — Le mécanisme du cinémomètre Richard est une application de l'engrenage roue et vis sans fin.

Digitized by Google

Entre deux plateaux circulaires P_1 et P_2 tournant autour d'un même axe avec des vitesses angulaires égales mais de signes contraires, se trouve placée une molette M calée sur l'arbre d'une vis sans fin ; cette dernière, comme l'indique la figure 362, peut tourner entre deux galets G_1 et G_2 qui reçoivent leurs mouvements de la machine en observation et tournent avec des vitesses proportionnelles à celle que nous nous proposons de mesurer.

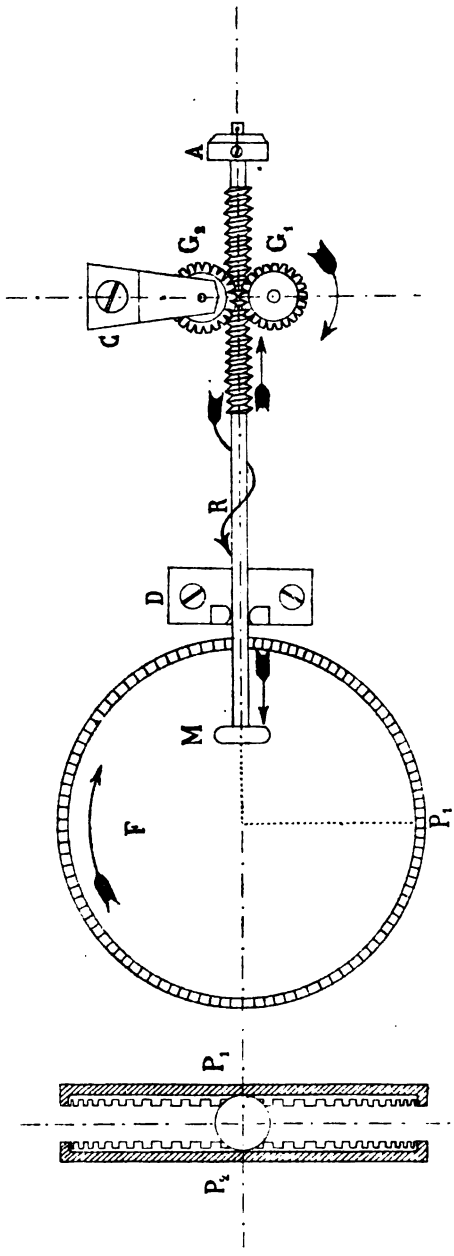


Fig. 362.

Pour fixer les idées, communiquons au plateau inférieur un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω et de sens F; l'autre tourne alors en sens inverse et ils communiquent tous deux à la molette un mouvement de rotation de sens R.

La vis considérée par rapport aux galets supposés fixes se comporte alors comme une vis par rapport à son écrou, et se rapproche du centre O; considérée par rapport aux galets en mouvement, elle se comporte comme une crémaillère par rapport au pignon qui la conduit et s'éloigne de ce même centre. La molette M qui, de ce fait, est soumise à deux mouvements de translation simultanés et de

Digitized by Google

sens contraires se tient alors en équilibre lorsque ses vitesses sont égales.

Pour trouver cette position, désignons par r le rayon de la molette et par d sa distance à l'axe de rotation des plateaux. Ses points de contact avec les plateaux ayant des vitesses égales à ωd, elle force la vis à tourner avec une vitesse angulaire égale à $\omega \times \frac{d}{r}$ et prend ainsi une vitesse de translation qui, à l'instant considéré, a pour expression :

$$\frac{P}{2\pi} \times \omega \times \frac{d}{r}.$$

Comme d'autre part, les deux galets tournent avec la vitesse angulaire ω', la vis qui engrène avec eux tourne avec la vitesse ω_1 liée à la précédente par la relation :

$$\frac{\omega_1}{\omega'} = \frac{Z}{1},$$

Z désignant le nombre de dents de chacun d'eux et la molette est soumise à une seconde vitesse de translation d'expression :

$$\frac{P}{2\pi} \times \omega' \times Z.$$

Il en résulte que l'équation d'équilibre peut s'écrire :

$$\frac{P}{2\pi} \times \omega \times \frac{d}{r} = \frac{P}{2\pi} \times \omega' \times Z.$$

Elle donne :

$$d = \frac{\omega'}{\omega} \times Z \times r.$$

La distance d est donc proportionnelle au rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, c'est-à-dire au quotient du nombre de tours effectués par la machine par le temps qui leur correspond.

On conçoit donc comment l'instrument permet d'évaluer le nombre de tours faits par une machine en mouvement de rotation : il suffit de rendre la vis solidaire d'une aiguille qui se déplace devant un quadrant gradué par comparaison et qui indique pour chacune de ses positions d'équilibre le nombre de tours que l'on cherche à évaluer.

Tachymètres.

Les tachymètres sont des instruments qui permettent, comme les précédents, d'évaluer une vitesse angulaire, ou bien encore d'observer

Digitized by Google

les mouvements de certaines machines. Basés sur les déplacements que communique la force centrifuge à certaines masses placées dans des conditions déterminées, ils conduisent à des résultats moins rigoureux que ceux fournis par les cinémomètres.

258. Chronotachymètre P. L. M. — La Compagnie P. L. M. possède depuis une dizaine d'années 400 chronotachymètres, construits dans ses ateliers.

Ces appareils, qui ont pour objet d'enregistrer toutes les circonstances de la marche des locomotives, fournissent des relevés graphiques très lisibles tant que la vitesse ne dépasse pas 80 à 90 kilomètres à l'heure. Aux vitesses supérieures, qu'on atteint couramment aujourd'hui, les frappes des marteaux sur le tambour enregistreur sont trop rapprochées.

Pour ces vitesses, il a fallu augmenter la vitesse de rotation du tambour, et pour y arriver on a été conduit à l'entraîner, non plus par une horloge remontée périodiquement à la main, mais par un mouvement d'horlogerie remonté automatiquement par le mécanisme de la locomotive.

Outre cette modification essentielle, le nouveau chronotachymètre P. L. M., type de 1900, présente certains perfectionnements de détail concernant le mode de liaison du tambour enregistreur avec le tube qui l'entraîne, et la frappe des marteaux qui laissent leurs traces sur les feuilles de relevés.

Description. — Les figures 363 et 364 représentent le montage de l'appareil sur la locomotive. Le chronotachymètre proprement dit est contenu dans la caisse en tôle A dont toutes les portes peuvent être fermées et plombées pendant le fonctionnement de l'appareil.

Le mécanisme contenu dans cette caisse se compose de deux parties bien distinctes : d'une part, le tambour enregistreur et tous les organes qui le mettent en mouvement avec une vitesse proportionnelle au temps; de l'autre, quatre marteaux dont les coups impriment sur le tambour quatre séries de marques différentes, et une partie des organes qui transmettent à ces marteaux le mouvement de la bielle d'accouplement B.

Entre la caisse du chronotachymètre et la bielle d'accouplement B, la transmission se fait par l'intermédiaire de la manivelle équilibrée C. de l'arbre horizontal *ab* et de l'arbre vertical *cd*.

Il résulte de cette disposition que le nombre de tours de la manivelle et de l'arbre *ab* est rigoureusement égal au nombre de tours de roues de la locomotive.

Digitized by Google

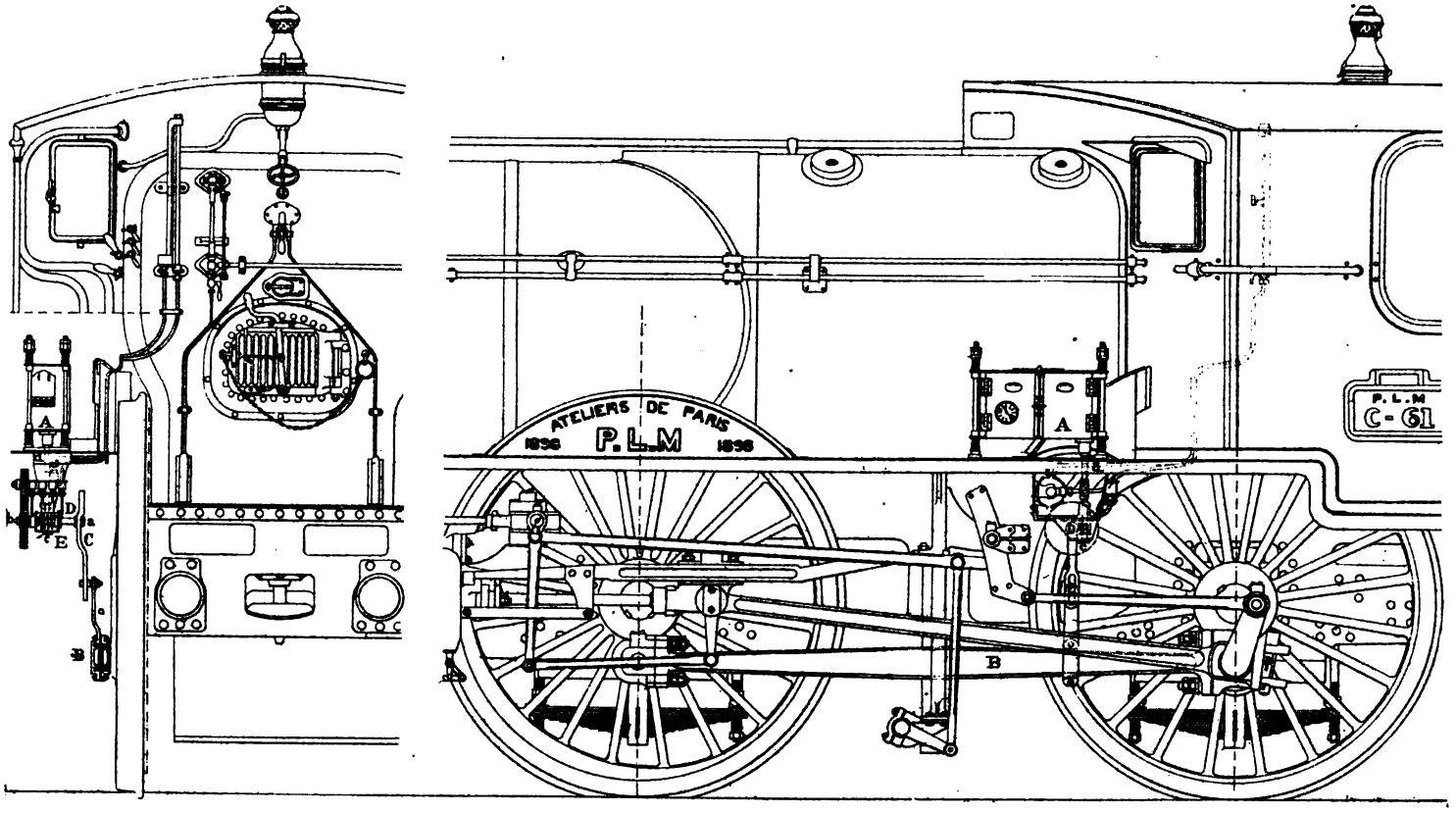


Fig. 363.

Digitized by Google

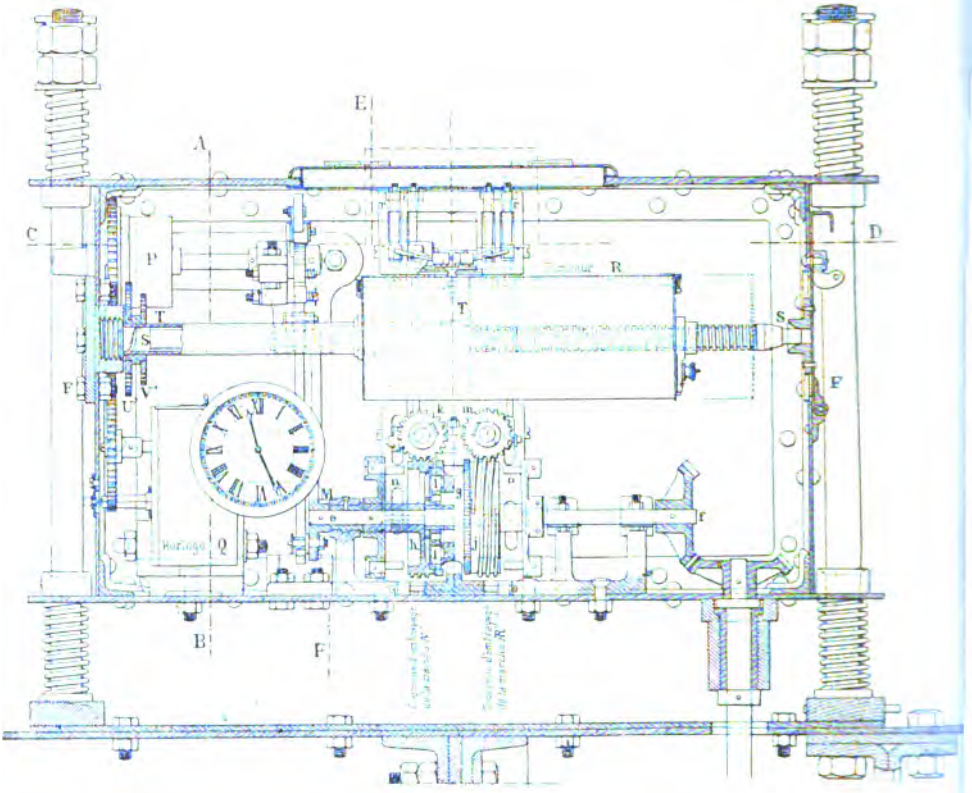


Fig. 364.

COUPE SUIVANT CD

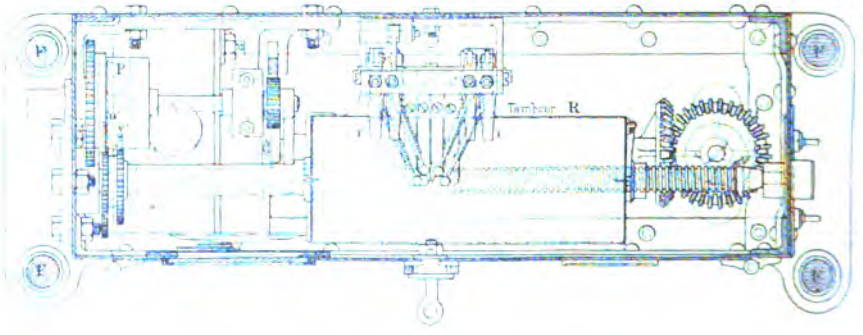


Fig. 365

Digitized by Google

COUPE SUIVANT AB

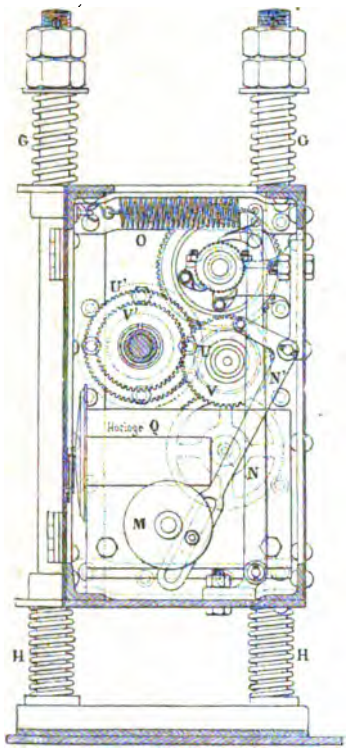


Fig. 366.

COUPE SUIVANT EF

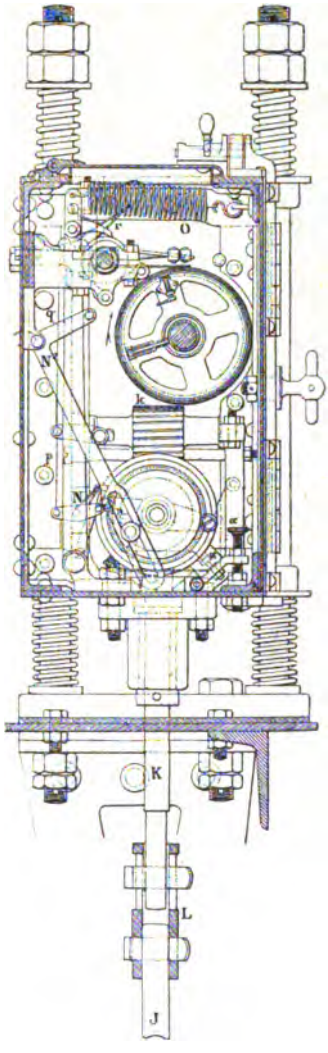


Fig. 367.

Digitized by Google

Sur l'arbre *ab* est clavetée une vis sans fin D qui entraîne l'arbre vertical *cd* au moyen du pignon hélicoïdal E. Le nombre de dents de ce pignon étant de huit, l'arbre *cd* fait un tour pour huit tours de roues de la locomotive.

Suspension du chronotachymètre proprement dit. — Les figures 364, 365, 366 et 367, représentent le chronotachymètre proprement dit et font voir en même temps comment il est porté par le tablier de la locomotive. Les quatre longues tiges verticales FF qui le fixent sur ce tablier le maintiennent entre deux séries de ressorts à boudins GG et HH, dont le but est de le soustraire autant que possible aux vibrations et aux chocs produits par la marche de la locomotive.

Le chronotachymètre pouvant, d'après ce qui précède, se déplacer verticalement par rapport au tablier de la locomotive, l'arbre vertical *cd* (fig. 363), qui lui donne le mouvement a dû être fait en deux pièces J et K (fig. 367), fixées la première au pignon hélicoïdal E et la seconde au chronotachymètre lui-même. Ces deux pièces sont réunies par un manchon L qui est claveté à poste fixe sur la pièce J et dont le clavetage sur la pièce K permet le déplacement longitudinal de cette dernière.

Transmission du mouvement aux marteaux (fig. 364, 365, 366 et 367). — L'arbre vertical K commande, par deux roues d'angle égales, l'arbre horizontal *ef*. Celui-ci porte un manchon goupillé *g* et deux manchons fous *h* et *j*. Ces deux derniers sont symétriques l'un de l'autre par rapport au manchon *g*, et ils en reçoivent le mouvement à tour de rôle, l'un d'eux *h* étant entraîné pendant la marche en avant de la locomotive et l'autre *j* pendant la marche en arrière. La transmission de mouvement se fait au moyen de deux encliquetages, système Dobo. De chaque côté du manchon *g* sont articulées quatre cames *l, l*, que des ressorts appuient contre les faces intérieures des couronnes faisant corps avec les manchons *h* et *j*. La forme de ces cames est telle que suivant le sens de la rotation du manchon *g* qui les porte, elles s'arc-boutent contre la couronne voisine et l'entraînent avec elles, ou bien elles n'exercent sur elle que le léger frottement dû à la pression des ressorts et la laissent immobile pour peu que la résistance à vaincre ait une certaine valeur. Afin d'être sûr qu'aucun mouvement de recul ne se produise dans ce dernier cas, chacune des couronnes porte une denture avec laquelle engrène un cliquet qui ne permet le mouvement que dans un sens.

Ce système d'embrayage est très sûr ; il a de plus l'avantage de ne comporter aucun jeu pour passer d'un sens de rotation à l'autre et de ne produire aucun choc. Mais il y a lieu de remarquer que si, grâce à

Digitized by Google

l'arc-boutement, le manchon porte-cames ne peut jamais devancer la couronne qu'il entraîne, il ne peut, d'autre part, quand il ralentit sa marche, empêcher celle-ci de le devancer en vertu de son inertie. Pour éviter que ce dernier effet ne se produise, il faut donner à la couronne une résistance assez grande à vaincre ; c'est pour cela que l'on a monté contre chacune des couronnes un sabot-frein en gaïac pressé par un ressort. L'un de ces sabots se voit en α sur la figure 367. La vis x' sert à bander le ressort qui l'appuie.

Chacune des couronnes porte à sa surface extérieure un filet de vis sans fin au moyen duquel elle entraîne l'un des pignons k et m (fig. 364 et 367). L'arbre de chacun de ces derniers porte un doigt qui agit à chaque tour sur l'un des marteaux qui frappent les styles imprimeurs. Les pignons k et m ayant vingt dents, il se produit un coup de marteau chaque fois que l'arbre ef a fait vingt tours dans le même sens et par conséquent chaque fois que la locomotive a fait $20 \times 8 = 160$ tours.

Outre la couronne qui fait corps avec lui, chacun des deux manchons h et j porte, goupillé avec lui, une manivelle double n et o, dont chacun des bras vient successivement agir sur un second marteau. Ce marteau frappe ainsi deux coups par tour de l'arbre ef, et par conséquent un coup pour quatre tours de roues de la locomotive, soit environ 1 coup tous les 25 mètres, si les roues ont 2 mètres de diamètre.

Il est facile à l'inspection de la figure 367, de se rendre compte de la manière dont les manivelles n et o d'une part, et les arbres des pignons k et m d'autre part, agissent sur les quatre marteaux. On voit que les premières, en poussant les bielles p, et les secondes en tirant les bielles q, soulèvent leurs marteaux respectifs, et que c'est en retombant sous l'action des ressorts r que ceux-ci viennent frapper les styles.

Pour éviter que les marteaux, après avoir frappé une première fois les styles, ne viennent imprimer en rebondissant une deuxième empreinte à côté de la première, on a placé au-dessous des marteaux une lame de ressort pour supprimer cet inconvénient.

Transmission du mouvement au tambour. — A l'extrémité de l'arbre horizontal ef est fixé un plateau excentrique M (fig. 364, 365, 366 et 367) qui donne un mouvement de va-et-vient au levier vertical N par l'intermédiaire de la bielle coudée N'.

Le levier vertical porte à sa partie supérieure un cliquet qui, sous l'action du ressort à boudins O, tend toujours à faire tourner le rochet avec lequel il est engagé. A chaque mouvement de ce levier, le rochet remonte le ressort enfermé dans le barillet auxiliaire P et ce dernier entraîne, à son tour, les roues d'engrenage qui font tourner le tambour enregistreur. Le déroulement du barillet auxiliaire est réglé par une

Digitized by Google

horloge régulatrice Q, qui donne en même temps l'indication des heures. Cette horloge est munie, dans ce but, d'un échappement d'un genre particulier appelé « échappement d'égalité ».

Le ressort du barillet de l'horloge régulatrice se remonte à la main à 5 tours et marche 24 heures ; celui du barillet du mouvement auxiliaire n'a pas besoin d'être remonté à la main, il se met de lui-même en mouvement dès les premiers tours de roues de la locomotive, mais il ne fait avancer le tambour que lorsque l'horloge régulatrice fonctionne. Au bout de 30 à 35 minutes de marche, le ressort du mouvement auxiliaire est remonté, à fond de course ; à partir de ce moment, ce ressort cesse d'agir et l'entraînement du tambour se fait directement par l'action du ressort à boudins O.

Mais si, dans cet état, la locomotive vient à s'arrêter en cours de route, ce qui arrête le remontage automatique, le ressort du barillet auxiliaire fait de lui-même tourner encore le tambour pendant 3 heures, au minimum.

Organes commandés par le mouvement auxiliaire d'horlogerie. — Les organes commandés par le mouvement auxiliaire d'horlogerie déplacent une feuille de papier devant les marteaux avec une vitesse déterminée, de telle sorte que l'espacement des marques imprimées sur le papier à chaque coup de marteau puisse servir de mesure à la vitesse de la locomotive.

Montage du tambour enregistreur. — La feuille de papier sur laquelle on veut ainsi obtenir le relevé graphique de la marche de la locomotive, est enroulée sur le tambour R. Celui-ci est porté par un arbre fixe SS dont la moitié de droite (fig. 365 et 366) est filetée. Le tambour repose directement sur cet arbre par son extrémité de droite. A l'extrémité opposée, un tube TT est interposé entre l'arbre et le tambour. Le tube TT et le tambour peuvent tourner librement autour de l'arbre fixe ; mais ils sont liés entre eux, dans leur mouvement de rotation, par un petit galet qui glisse dans un tube longitudinal ménagé à l'intérieur du tambour. Ce dernier peut d'ailleurs se déplacer librement le long du tube ; celui-ci au contraire ne peut se déplacer le long de l'arbre fixe.

Le mouvement auxiliaire d'horlogerie donne un mouvement de rotation uniforme au tube TT, et par son intermédiaire au tambour R, au moyen des engrenages U et U′ ou V et V′. Le rapport des engrenages U et U′ est 0,6 ; les engrenages V et V′ sont égaux. D'après cela, et comme l'arbre de commande du mouvement auxiliaire fait un tour dans douze minutes, l'emploi des premiers engrenages fait faire au tambour un tour dans dix minutes et celui des seconds un tour dans six minutes.

Digitized by Google

Les premiers conviennent pour les trains express et les seconds pour les trains rapides.

En même temps que le tambour R tourne autour de l'arbre SS, il se déplace lentement le long de cet arbre sous l'action d'une clavette qui s'engage dans son filet de vis et que l'on peut embrayer ou débrayer à volonté. Quand la clavette est en prise, le tambour est animé d'un mouvement hélicoïdal dont le pas est précisément égal à celui de la vis qui le guide. Il en résulte que toutes les marques tracées sur lui par un même marteau s'alignent suivant une hélice de même pas ; après déroulement du papier, cette hélice devient naturellement une ligne droite, très peu oblique par rapport au bord du papier, si celui-ci a été placé suivant une génératrice du tambour.

Précautions pour annuler l'effet des jeux. — Pour que les marques s'alignent bien, il est nécessaire que la clavette d'embrayage soit bien fixée au tambour et bien ajustée sur la vis. Pour qu'elles se suivent bien régulièrement, il faut que le tambour ne ballotte pas par rapport au tube qui l'entraîne, ni celui-ci par rapport aux engrenages de l'horloge. On ne peut pourtant pas supprimer toute espèce de jeu entre ces divers organes, mais on fait en sorte, par une combinaison de ressorts, que les pièces ne ballottent pas malgré ce jeu.

Montage du papier sur le tambour. — Sur le tambour s'enroule une première feuille de papier noircie au moyen d'une composition grasse spéciale, et qui est destinée à teinter en noir les empreintes des coups de style sur la feuille de papier blanc enroulée par-dessus. Les deux feuilles sont fixées à chaque extrémité du cylindre au moyen d'une aiguille et d'une agrafe.

Il est possible d'imprimer plusieurs relevés à la fois ; il suffit pour cela de superposer, en les alternant, plusieurs feuilles de papier gras et de papier blanc.

Mise en train de l'appareil. — Quand le tambour est garni, on le débraye de la vis et on le pousse à la main jusqu'à l'extrémité de sa course vers la gauche. On peut également le tourner autour de son axe pour l'amener dans la position qu'on désire, ce qui se fait sans entraîner l'horloge à cause du mode de montage avec rondelles de friction sèche des roues V et V'. Enfin on embraye la clavette du tambour, on remonte l'horloge et l'appareil entre immédiatement en fonction.

Relevés graphiques obtenus. — La figure 368 donne un spécimen des relevés obtenus. Quatre séries de marques ou frappes figurent sur ce relevé. La plus nombreuse est celle des frappes correspondant à quatre tours de roues et à la marche en avant ; elles sont de forme rectangulaire et sont alignées sur des droites tracées préalablement sur la

Digitized by Google

feuille de papier. Au-dessous de ces frappes rectangulaires, se trouvent les frappes triangulaires tracées comme les premières pendant la marche en avant, mais dont l'espacement correspond à 160 tours de roues. Au-dessus et dans l'interligne, se trouvent les frappes de la marche en arrière, d'abord les frappes rectangulaires, puis les frappes triangulaires dont l'espacement correspond respectivement à 4 et à 160 tours de roues.

Le relevé a été obtenu avec la combinaison d'engrenages qui fait faire au tambour un tour dans dix minutes. Par conséquent, chaque ligne du relevé correspond à dix minutes, et comme elle a 314 millimètres de long, chaque intervalle de $\frac{314}{10}$ ou de $31^{mm},4$ correspond à une minute.

D'après cela, l'inspection du relevé montre que la machine C-36 chargée de faire le train 2 du 18 avril 1900 de Laroche à Paris, a quitté son poste de remisage 24 minutes avant le départ du train et que pendant ce temps elle a fait les manœuvres suivantes :

$18 \times 4 = 72$ tours en avant. . . .	»
Arrêt..	15 minutes,
$20 \times 4 = 80$ tours en avant. . . .	»
Arrêt..	14 secondes.
$5 \times 4 = 20$ tours en arrière. . . .	»
Arrêt..	2 minutes 46 secondes.

Pour transformer les nombres de tours de roues en espaces parcourus par la machine, il faut connaître la circonférence exacte des roues. Cette circonférence varie avec l'usure des bandages et, par conséquent, il faut la mesurer de temps en temps. On la mesure en faisant avancer la machine d'un nombre déterminé de tours de roues sur une des voies du dépôt et en mesurant l'espace parcouru. Si l'on procède tous les mois à cette opération, les différences constatées d'une mesure à l'autre sont à peine sensibles.

Quand la machine C-36 a fait le service auquel se rapporte le relevé de la figure 368, la circonférence de ses roues motrices était égale à $6^{m},1920$. Par conséquent, l'intervalle compris entre deux frappes rectangulaires du relevé correspond exactement à $6^{m},192 \times 4 = 24^{m},768$ et l'intervalle compris entre deux frappes triangulaires à $24^{m},768 \times 40 = 990^{m},72$. Il est facile, d'après ces chiffres, de traduire en mètres parcourus dans un sens ou dans l'autre les manœuvres qui ont précédé le départ du train : il est également facile de repérer sur le relevé les points kilométriques intéressants et notamment les stations. C'est ce qui a été fait sur la figure 368.

Pour calculer la vitesse de la machine à un moment donné, il suffit

Digitized by Google

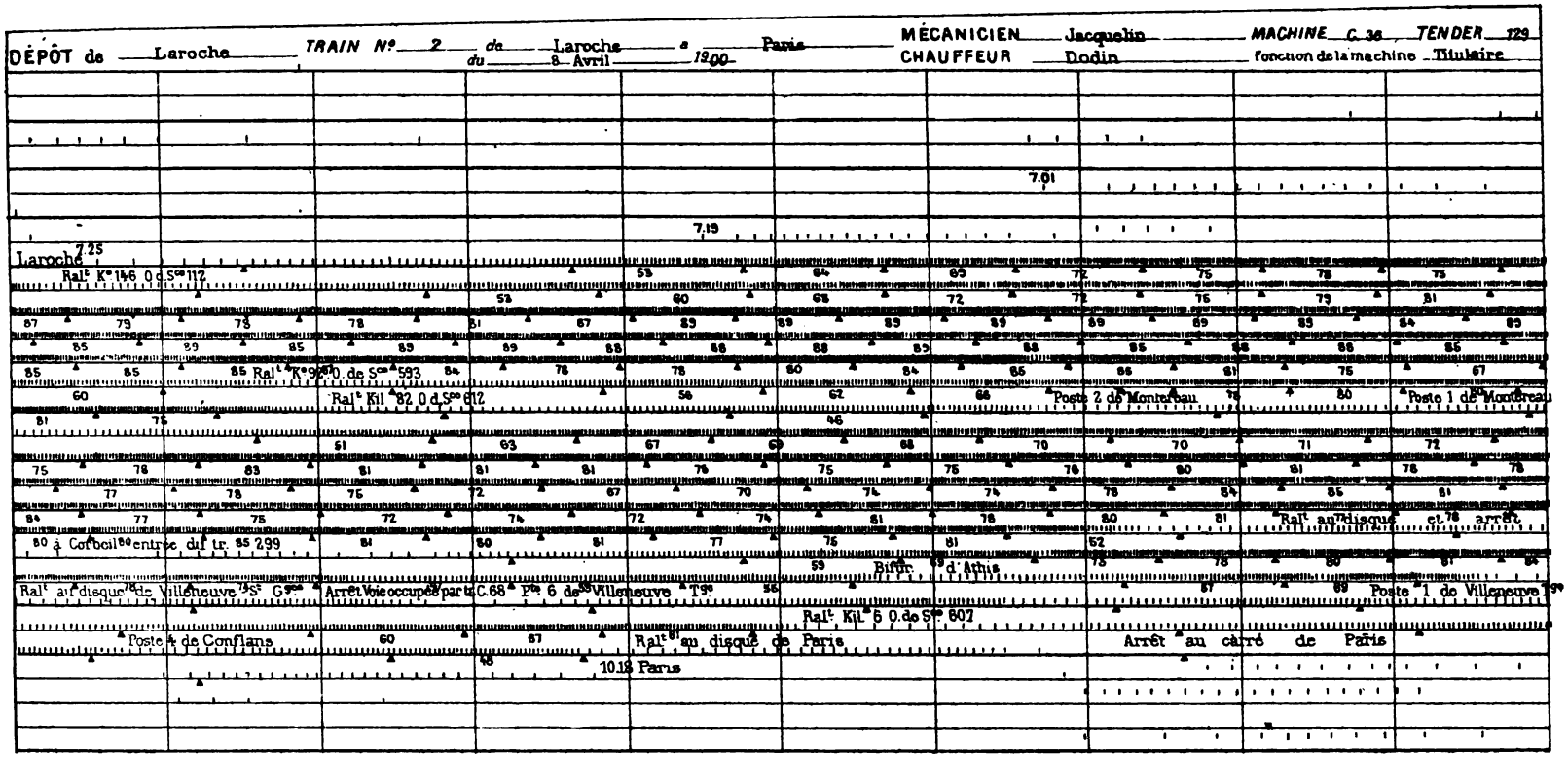


Fig. 368.

Digitized by Google

de mesurer l'intervalle en millimètres t compris entre les deux frappes triangulaires les plus voisines. Le temps écoulé entre ces deux frappes est, d'après ce que nous avons dit plus haut, égal à $\frac{t}{31,4}$ minutes ou $\frac{t}{31,4 \times 60}$ heures.

Pour vérifier rapidement si la vitesse permise sur chaque section du chemin n'a pas été dépassée, il est utile de préparer à l'avance une échelle en papier sur laquelle sont indiqués les espacements des frappes triangulaires correspondant aux vitesses maxima. En faisant courir cette échelle le long de chaque ligne du relevé, on voit d'un simple coup d'œil si le mécanicien est resté dans les limites autorisées.

Comme on le voit, les indications du chronotachymètre P. L. M. sont d'une netteté et d'une régularité tout à fait remarquables. Elles sont en même temps d'une exactitude absolue: en calculant d'après le nombre de frappes et la circonférence des roues la distance des deux stations extrêmes du relevé, on retrouve avec toute l'approximation désirable leur distance réelle.

Digitized by Google

APPENDICE

NOTE DE M. RICHARD
SUR LES MACHINES A TAILLER LES ENGRENAGES

On sait que les machines à tailler les engrenages peuvent se diviser en deux classes, au point de vue du travail même de leur outil, suivant qu'elles emploient la fraise ou le tranchant des raboteuses, et, dans chacune de ces classes, en trois variétés, suivant que l'on peut y tailler des dentures droites, coniques ou hélicoïdales ; cette classification n'a d'ailleurs, comme la plupart de celles de la technologie, rien d'absolu, car certaines machines, assez compliquées il est vrai, peuvent tailler à volonté les trois dentures. Comme il fallait s'y attendre, les machines à fraises étaient à l'Exposition, de beaucoup les plus nombreuses, sans compter, bien entendu, les fraiseuses universelles ; il n'y a, en effet, aucune raison de ne pas profiter, pour ce genre de machines, des avantages généraux et bien connus de la fraise. Néanmoins, principalement pour la taille des pignons coniques, le principe de l'étau limeur, avec outil d'un affûtage facile et guidé par un gabarit ou son équivalent, se prête à des solutions cinématiques très élégantes, qui lui ont permis de soutenir honorablement la lutte. Nous en trouverons plus loin un exemple dans la machine de Los Rice (1).

(1) Un exemple très remarquable et extrêmement original se rencontre dans la machine Fellows Gear Shaper C°, dont on trouvera la description dans la *Revue de Mécanique*.

Digitized by Google

Machine de Gould et Eberhardt.

Les machines à tailler les roues et pignons hélicoïdaux de *Gould* et *Eberhardt* sont bien connues aujourd'hui (1). Je me bornerai à en rappeler le principe général et à en décrire avec quelques détails deux types récents.

Ainsi qu'on le voit par la figure 369, toutes ces machines comprennent essentiellement deux chariots : l'un mobile sur une colonne verticale, porte la broche sur laquelle on monte la roue en taille ; l'autre, mobile sur une table horizontale, porte la broche porte-fraise.

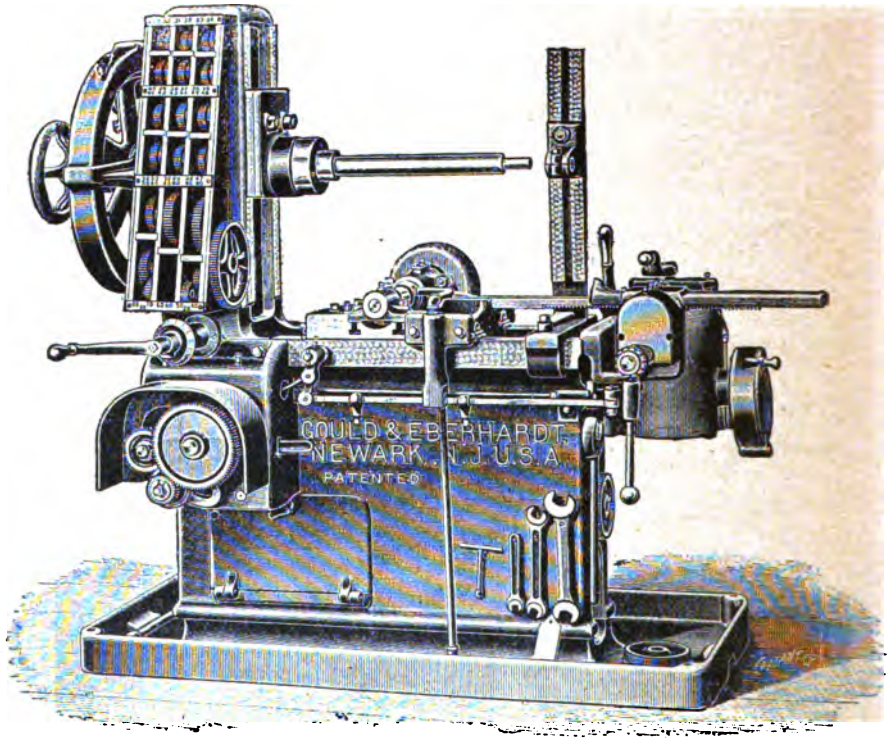


Fig. 369.

La broche porte-roue est commandée par vis sans fin au moyen d'un mécanisme diviseur fort ingénieux, dont nous décrirons tout à l'heure un exemple, et qui fonctionne sans jeu par entraînement à friction et arrêt par cliquet. Pour la taille des roues droites, la rotation de la broche s'arrête après chaque division, pendant le travail de la fraise ; pour le travail des pignons hélicoïdaux, cette rotation continue au contraire, de manière à suivre rigoureusement l'avance de la fraise hélicoïdale, dont le mécanisme de rotation est alors conjugué avec celui du diviseur.

(1) G. Richard, *Traité des machines-outils*, vol. II, p. 74.

Digitized by Google

La machine représentée par les figures 370 à 391, permet de tailler d'une façon entièrement automatique les pignons droits ou hélicoïdaux.

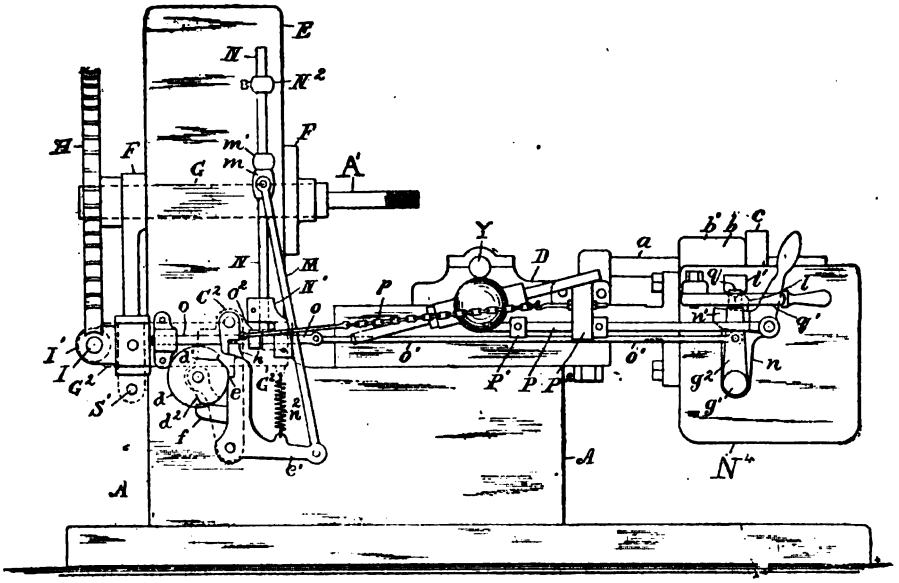


Fig. 370.

Le chariot D, qui porte la fraise taillante u, est commandé, sur sa glissière A, par la vis a, dont l'écrou c tourne tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, suivant que son pignon est mis, par l'embrayage c', en connexion

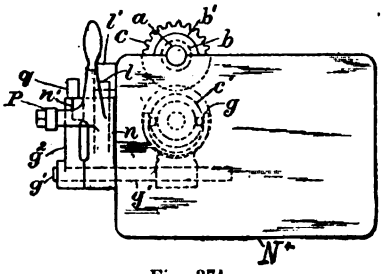


Fig. 371.

avec l'un ou l'autre des deux trains d'avance commandés de J_2 par JL. L'embrayage c' est commandé par le renvoi $gg'g_2$, à butée q (fig. 384) le maintenant par le loquet q' dans sa position de débrayage (fig. 377). Le levier g^2, commandé, du chariot D, par la butée P_2, les tocs P'P' et la tige P, entraîne autour de g' le bras nn', avec verrou à ressort l passant (fig. 371) sur le double plan incliné fixe l', qui assure à u sa stabilité dans ses positions extrêmes d'embrayage.

La broche porte-roue A'G, portée par le montant E, est commandée par J_2KII', avec entraînement par friction I_2, et ce même arbre I commande, par le train variable I_2S_2 (fig. 370) les cames dd' et d_2 (fig. 377). Pendant la

Digitized by Google

taille de la roue, le cliquet *ee,* enclenchant *d* en *d'*, arrête la rotation de I. Après l'exécution de cette taille, la chaîne *p,* attachée en P_2 au chariot D,

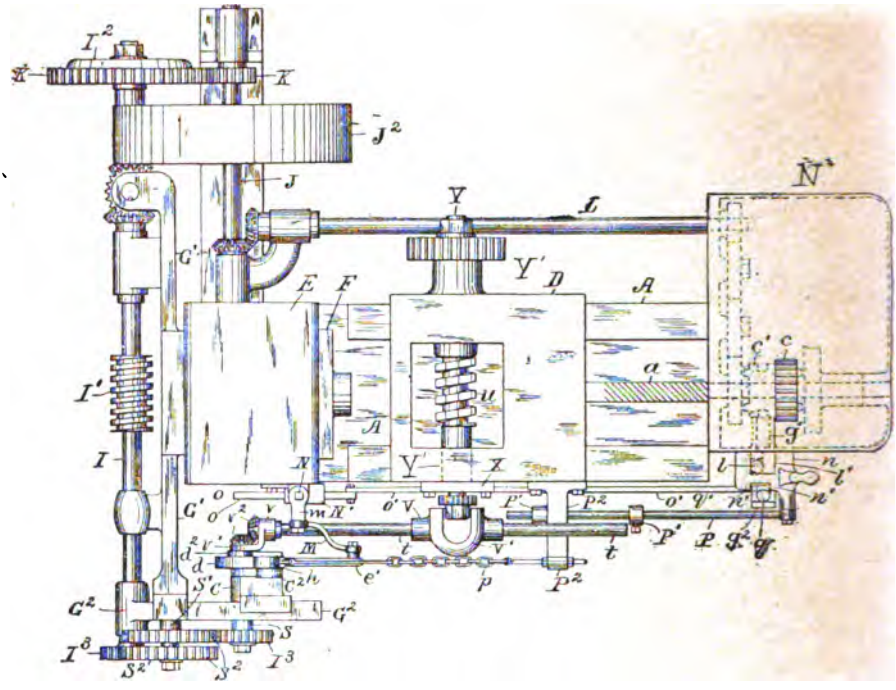


Fig. 372.

tire par h_2 la détente h_2h (fig. 376) de manière à lui faire déclencher *e* de *d'*, puis dépasser *e,* comme en figure 377, et, *d* se mettant alors à tourner, d_2 ramène, par la butée élastique *f, e* à renclencher *d'* à la reprise de la

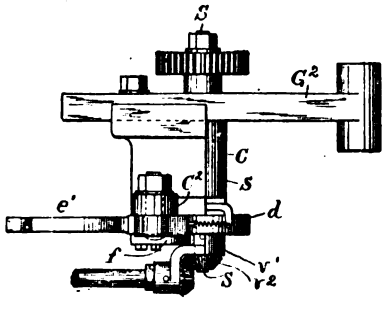


Fig. 373.

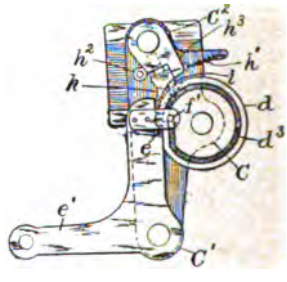


Fig. 374.

nouvelle taille. En outre, le bras *e'* de *e,* à rappel n_2 (fig. 370) commande, par M*m* et le toc ajustable *m'*, la tige N, verrouillant en O_2 la barre O_1, relevée par O' au levier g_2, ainsi maintenu dans sa position neutre

Digitized by Google

tant que N n'est pas relevée par e', et empêchant à coup sûr toute avance de la fraise avant le calage de d.

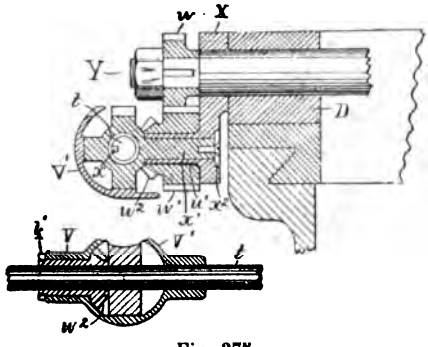


Fig. 375.

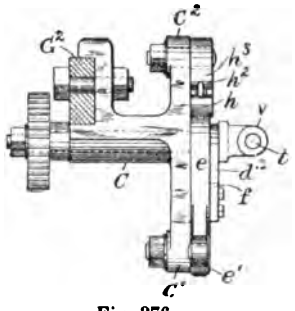


Fig. 376.

Quand D arrive (fig. 370) au bout de sa course de gauche à droite, n légèrement déplacé vers la droite, est prêt à entraîner dans le même sens le

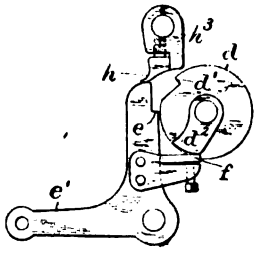


Fig. 377.

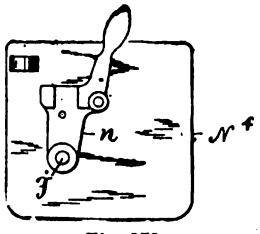


Fig. 378.

levier g_2, par la réaction du verrou à ressort l sur l', dès que N, lâchant O, le permettra, comme nous venons de l'expliquer, ce qui embraye l'écrou b

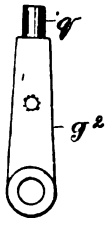


Fig. 379.

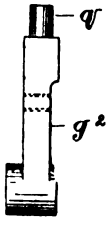


Fig. 380.

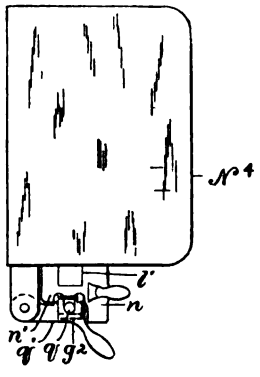


Fig. 381.

de la vis a de manière que le chariot D commence sa course active, de droite à gauche, jusqu'à son arrêt et renversement par le toc P'.

Digitized by Google

En figure 374, le rappel n_2 (fig. 370) est remplacé par un axe f' de e, pris dans une rainure d_2 de d qui, bien entendu, est contournée de façon à ne pas empêcher le fonctionnement précédemment décrit de la détente h_2h, à rappel h'.

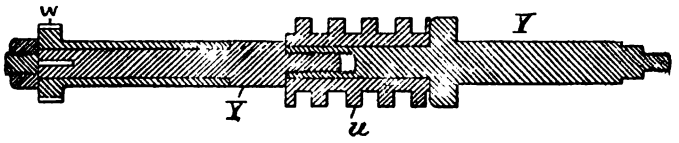


Fig. 382.

Pour pouvoir tailler les pignons hélicoïdaux, au moyen d'une fraise de forme u (fig. 372) on commande la broche Y par le train $S\text{-}v_2\text{-}t\text{-}w_2\text{-}w'\text{-}x'\text{-}w$ (fig. 372, 373 et 374), à manchon V, rainuré sur t, par lequel Y tourne dans un rapport constant avec I. Il suffit d'enlever x pour annuler l'action de l'arbre t, quand on en a besoin.

Ces machines de types très variés atteignent parfois de très grandes dimensions, susceptibles de tailler par exemple des roues de $2^m,50$ de diamètre et de 500 de large (1) avec des fraises de 300 de diamètre.

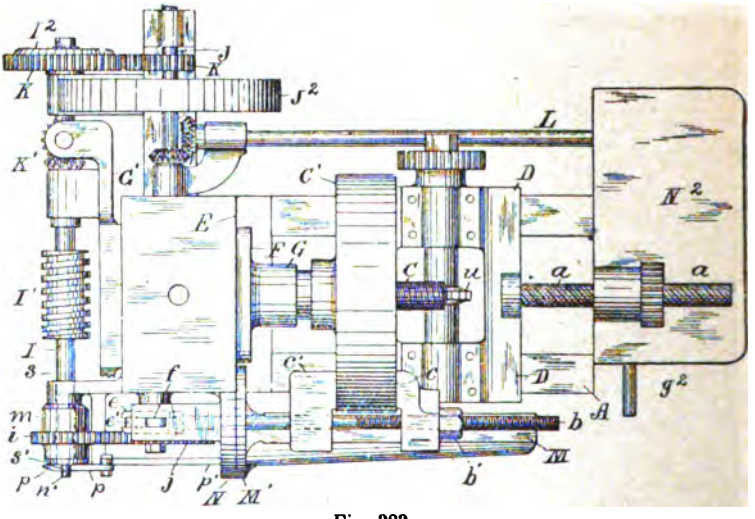


Fig. 383.

La machine représentée par les figures 383 à 391 diffère de la précédente par quelques perfectionnements ingénieux destinés principalement à assurer la fixité rigoureuse de la roue pendant sa taille.

On reconnaît sur les figures 383 et 384, en A, le socle supportant le chariot D de la fraise u et en E la colonne, à poupée F, pour la broche G du mandrin, ajustable verticalement par FF_2 (fig. 390) et qui reçoit, de la vis I et de la roue H, un mouvement de rotation périodiquement interrompu.

(1) *American Machinist*, 2 septembre 1897.

Digitized by Google

Le va-et-vient du chariot D est commandé, de la vis *a*, conduite par le

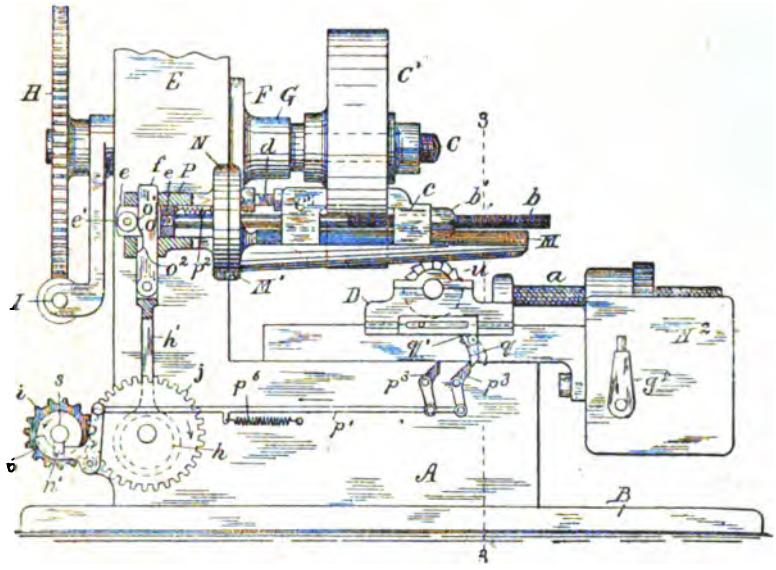


Fig. 384.

même mécanisme N^2 que dans la machine précédente, actionné par le train J^2JL, avec le levier de renversement g_2, et ce même arbre J commande

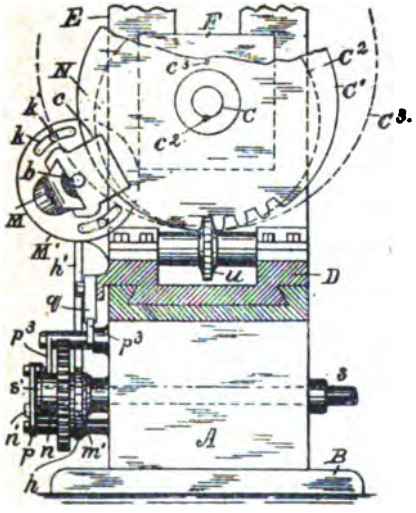


Fig. 385.

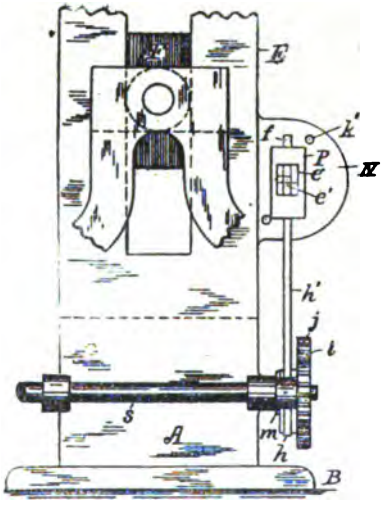


Fig. 386.

aussi la vis l' par l'engrènement KK_2, avec entraînement par frottement l_2, pour éviter les ruptures et simplifier les transmissions.

Comme pièce nouvelle, la colonne E porte latéralement, en N, une glis-

Digitized by Google

sière MM', pivotable sur N, et ajustable (fig. 385) par les boulons k' et les

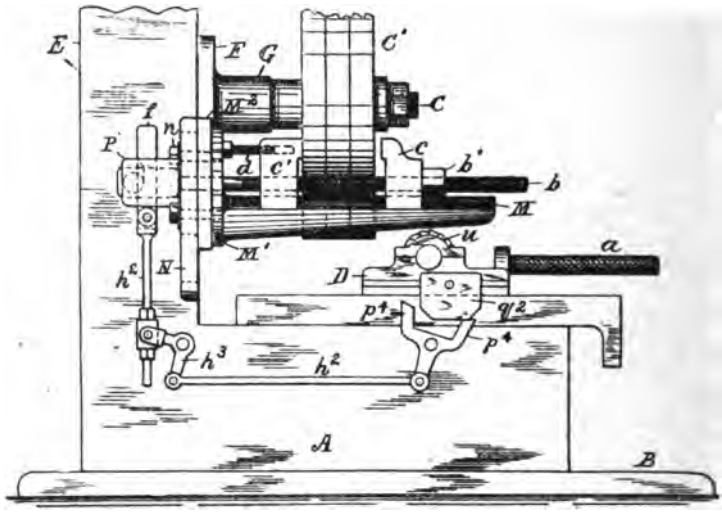


Fig. 387.

coulisses k. Cette pièce porte, en glissières, deux mâchoires c et c', que son

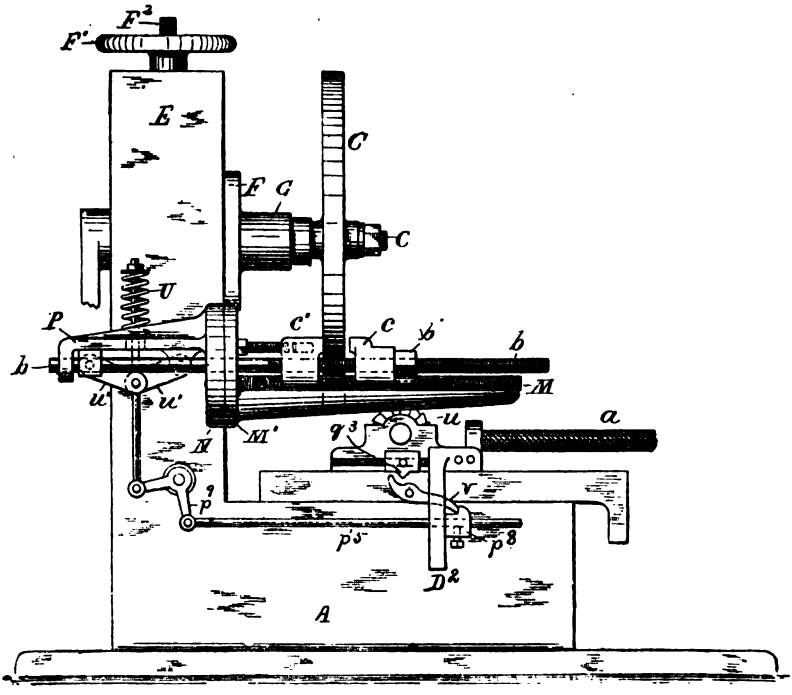


Fig. 388.

pivotement permet d'ajuster au diamètre variable des roues en taille C';

Digitized by Google

l'une de ces mâchoires, c', se fixe par un tasseau réglable d à l'appui de la roue C', sur laquelle vient se serrer au moment voulu l'autre mâchoire c, ajustable par l'écrou b' de la vis b, qui se termine par un coulisseau ee (fig. 384) mobile dans la glissière P de N, et tiré par un ressort p_2, qui

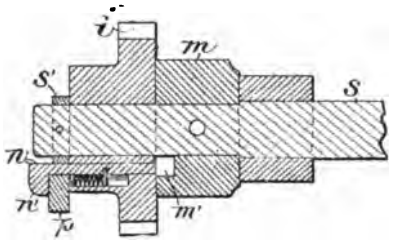


Fig. 389.

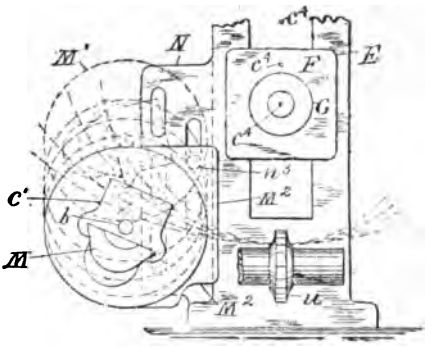


Fig. 390.

appuie le galet e sur la barre oo', commandée par l'excentrique h'; cette barre serre c sur C' quand elle se trouve dans la position figurée, et la desserre quand son encoche o_2 arrive au droit du galet e', comme on le voit en figure 387. A cet effet, le pignon J de l'excentrique h est commandé, de l'arbre S, par un pignon i (fig. 389) deux fois plus petit, appuyé sur le manchon m de S par le collier s', et entraîné par la cale nn' tant qu'elle reste maintenue par son ressort p_6 (fig. 384). Ce loquet p' est commandé (fig. 384) du chariot D, par le taquet qq' qui, après que la fraise a terminé sa passe, et quand D revient à droite, repousse le premier levier p_3 de manière à embrayer i par le déclenchement momentané de p qui, au bout d'un tour de i ou un demi-tour de l'excentrique h, redébraye i en retirant (fig. 389) n de m'. Ce demi-tour, en amenant l'encoche oz de f devant e, desserre c, puis le mécanisme diviseur fait pivoter la roue d'une dent, et le taquet q repousse le second levier p_3, qui fait faire à l'excentrique h un second demi-tour serrant la mâchoire c.

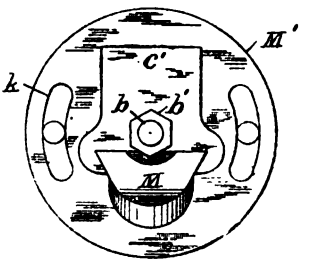


Fig. 391.

On peut d'ailleurs remplacer ce mécanisme par le dispositif plus simple $p_1h_2h_3h_2$ (fig. 387) dont la marche se comprend d'elle-même, ou par celui de la figure 390, dans lequel, au moment du serrage, le taquet v_2 déclanche par Vp le train p_5p_2 du genou uu', qui rappelé par son ressort U, serre, par b, c' sur C; au retour de u à droite, son toc D_2 ramène par p le renclenchement de V, qui maintient c desserré jusqu'au nouvel aller de u.

On a indiqué en figure 385 comment les mâchoires cc' pouvaient serrer facilement des roues de différents diamètres $C_1C_2C_3$, avec le centre du mandrin en cc_2c_3. Dans le dispositif (fig. 388), M peut se fixer par sa base M' à

Digitized by Google

différentes hauteurs sur la plaque N par les boulons coulissés n^3, de manière à l'adapter plus exactement aux variations même considérables du diamètre de C.

Machine de Los Rice.

Le principe de cette remarquable machine est facile à saisir sur la fig. 392 où l'on voit la petite roue à tailler fixée au bout d'un arbre horizontal, pivoté autour d'un axe vertical passant par le sommet du cône primitif de la roue en taille, dans le prolongement duquel cône se trouve celui du grand pignon calé, à droite de la figure, sur le même arbre. Ce pignon sert de gabarit, et ses dents sont appuyées sur un guide dont la face est dans le

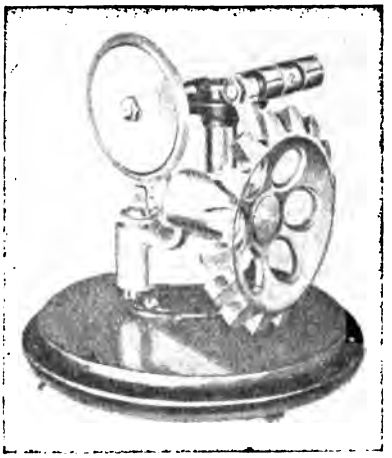


Fig. 392.

même plan que la fraise qui taille et qui passe par le sommet du cône primitif des pignons et par l'axe de leur arbre. Il s'ensuit que, si l'on fait pivoter cet axe autour de son pivot vertical, tout en maintenant toujours la dent du gabarit en prise avec son guide, la fraise taillera la face d'une dent semblable à celle sur laquelle appuie ce guide.

On reconnaîtra facilement (fig. 393), en L, la fraise du modèle de démonstration (fig. 392) en D^2 le pignon gabarit, en K son guide, en D' le pignon en taille, préalablement ébauché.

La broche D (fig. 395) porte la roue en taille D_1 (fig. 397) et son gabarit D_2, de diamètre cinq fois plus grand au cas figuré, et tourne dans les paliers excentrés d'une fourche CC, appuyée par un tasseau réglable C_4 sur le bloc C', que mène par un galet la came B de l'arbre A_8. L'un des paliers C_6 de D porte une cale C_8, permettant d'y fixer D de manière à l'empêcher de tourner pendant la taille, et cet arbre porte à son autre extrémité un diviseur E, avec encoches e' et double rang de touches e (fig. 396). Un levier à contrepoids F est articulé (fig. 395) sur un manchon F', fou sur D, et dont

Digitized by Google

le bras F s'enclenche avec les encoches c' par un cliquet F_4 et f_4, puis s'en déclenche quand f_4 vient, par la descente de C, heurter le taquet F_4. Ce taquet est (fig. 398) constitué par deux touches en V, ajustables de manière que, suivant que l'on finit le flanc droit ou gauche d'une dent, la touche

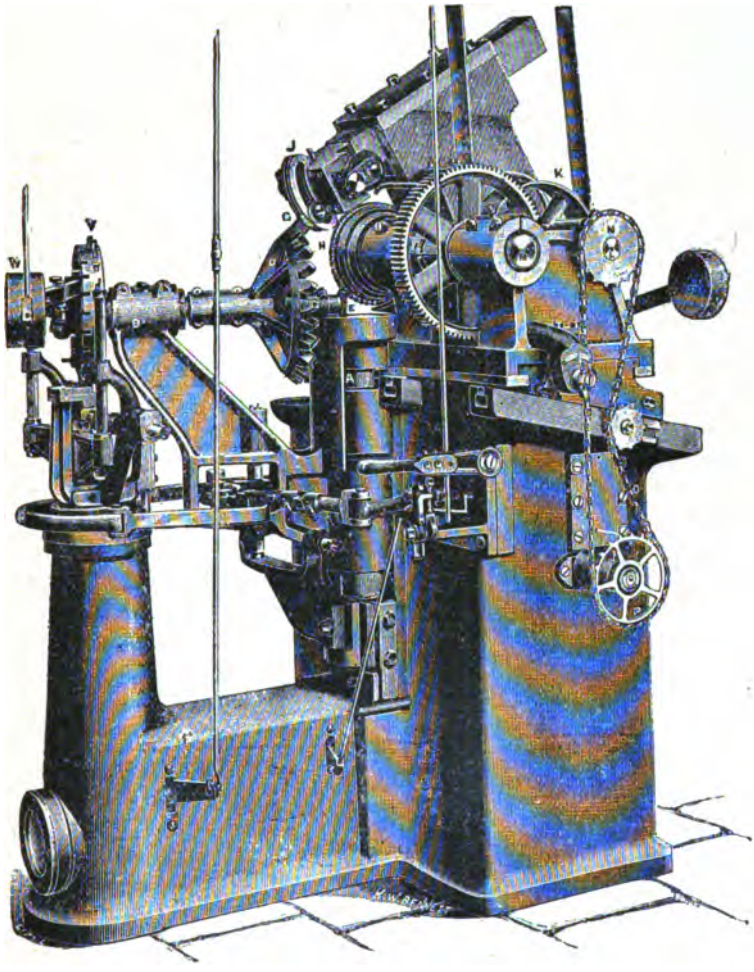


Fig. 393.

droite ou gauche repousse d'abord F_3 à droite ou à gauche de sa position verticale et le fasse tourner avec E de l'angle sous-tendu, dans la circonférence primitive de la roue en taille, par la demi-épaisseur de sa dent.

La came B soulève C d'abord rapidement, puis lentement pendant la coupe, et il faut que, pendant cette levée, le contre-poids ne tende pas à faire tourner D, ce qui empêcherait la fraise de tomber juste dans la rainure primitivement entaillée au milieu des pas de D'. A cet effet, la came F_6

Digitized by Google

(fig. 397) de A_8 soulève par $F_7F_8F_9$ le levier F de F_2 puis l'y laisse retom-

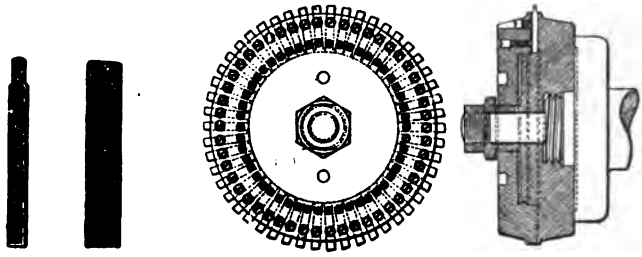


Fig. 394.

ber pendant la coupe, de manière que la dent correspondante du gabarit D_2 soit alors constamment appuyée sur le guide K (fig. 395).

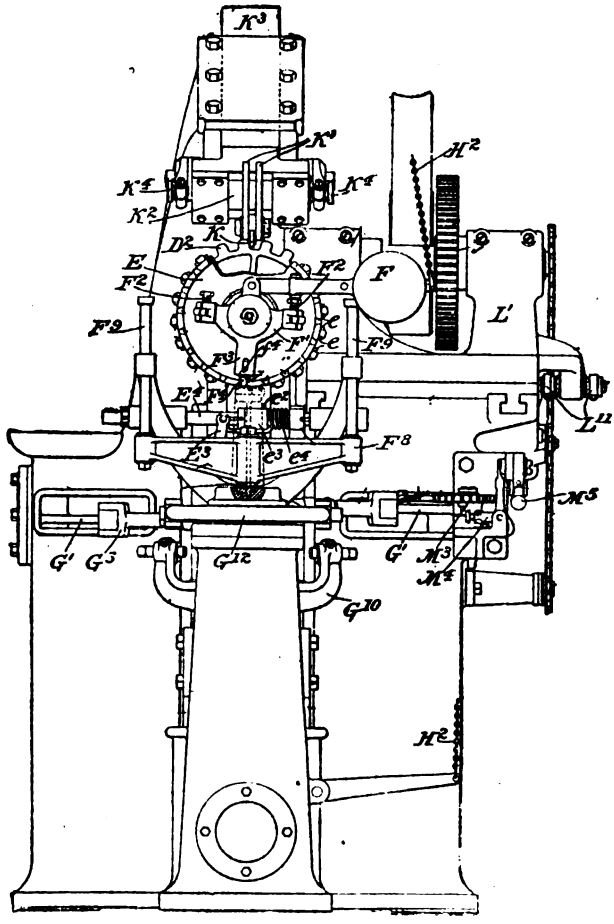


Fig. 395.

L'arbre vertical A_7 (fig 397) porte (fig. 398) deux cames G, qui comman-

Digitized by Google

dent par les renvois G' et G_6, à fourches G_7 le carrelet G_9, pivoté dans C et appuyé sur un guide G_{10}. C'est tantôt l'une tantôt l'autre de ces cames qui agit, suivant que l'on taille un flanc gauche ou droit, et l'on écarte à cet effet, de G_9, l'une des deux fourches G_7, par la manette G_{12} et ses bielles G_{13}. Les cames G impriment ainsi à C et à D le pivotement autour du sommet

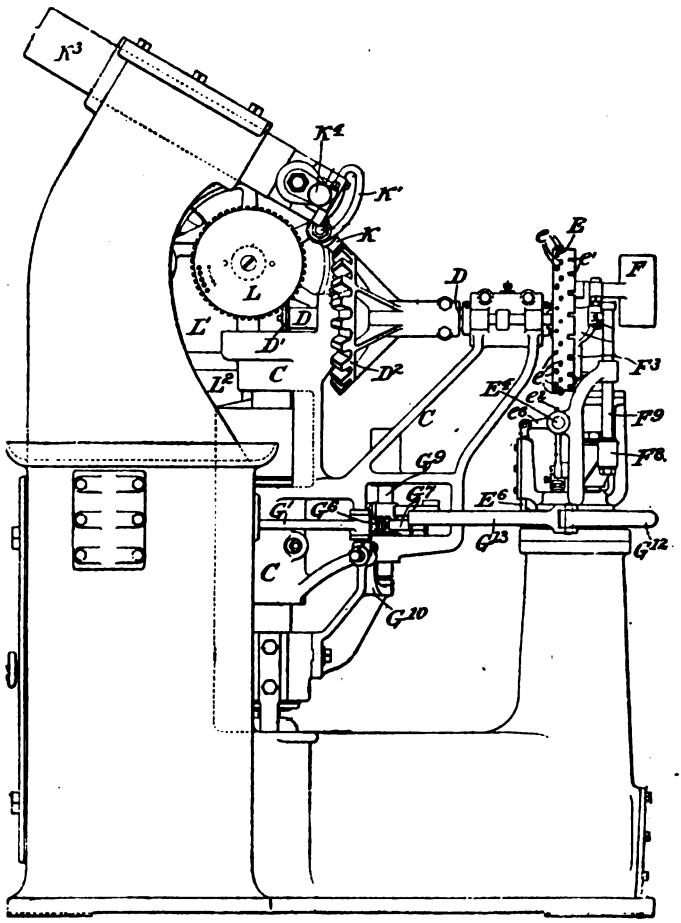


Fig. 396.

du cône primitif commun à D_1 et à D_2 nécessaire pour la taille des pignons coniques.

Ainsi que nous l'avons vu, après la coupe et pendant la descente de C, le diviseur E est séparé par le déclenchement f_1 de F et du levier F, puis la came diviseuse E' (fig. 397) de E_8 entraîne par (fig. 402) le renvoi $E_2E_3E_4$ et le ressort E_5, le manchon e_3, dont le taquet e_2 fait pivoter E d'une division, en repoussant la tige correspondante e de l'une ou l'autre rangée suivant que l'on taille le flanc gauche ou droit des dents, et que le plan

Digitized by Google

incliné E_5 (fig. 402) de G^{12} a mené, en conséquence, par E_6E_7, e_2 au droit de la rangée correspondante des touches c. En même temps, pendant sa descente de C et son retour à sa position centrale, la came H (fig. 397) de A_8 relève par H_2H_3 le poids F de manière qu'il n'appuie pas inutilement le gabarit D_2 sur K.

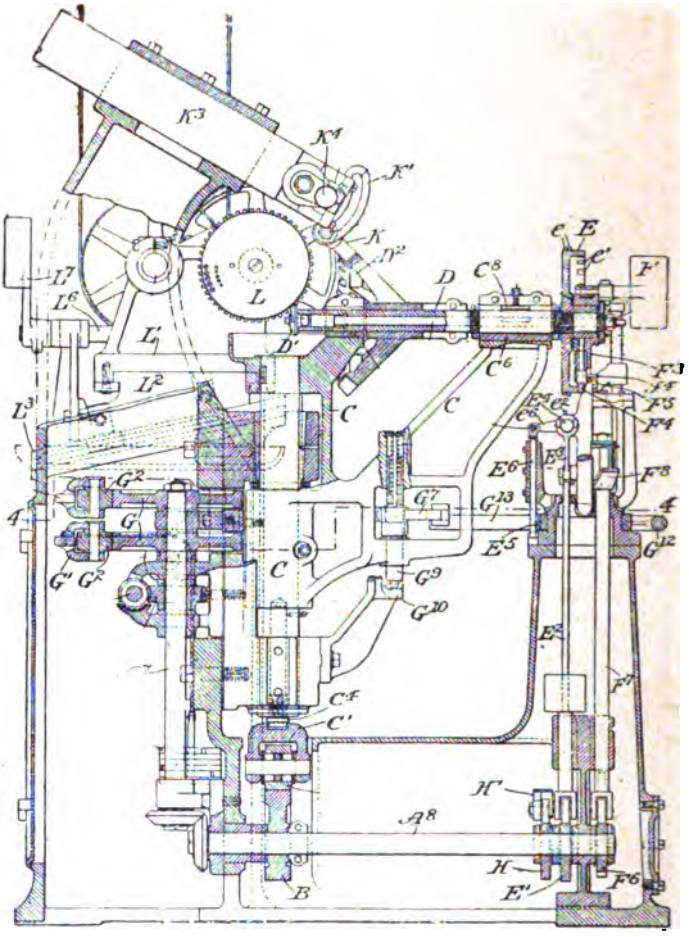


Fig. 397.

Le guide K, situé dans le plan de la fraise, peut (fig. 397) s'ajuster dans les coulisses K' du chariot K_2, réglable latéralement par les vis K_4 sur la barre K_3 de manière à changer sa position suivant le sens droit ou gauche de la taille.

Le chariot porte-fraise L_1 (fig. 399 et 401) peut glisser dans des limites fixées par l'écrou L', ajustable sur la glissière inclinée L_3, et L_1 se fixe sur L_2 dans la position correspondante au sens de la taille, par la pression,

Digitized by Google

sur ses taquets L_9, de l'excentrique L_8 (fig. 400) de l'arbre L_6, pivoté sur L_2, et à contrepoids L_7.

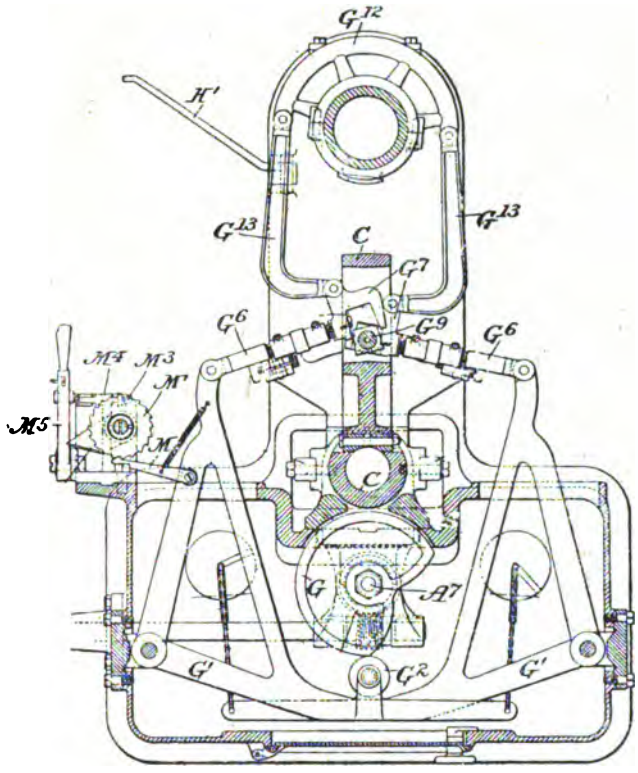


Fig. 398.

Après que toutes les dents de D ont été taillées d'un côté, à droite par

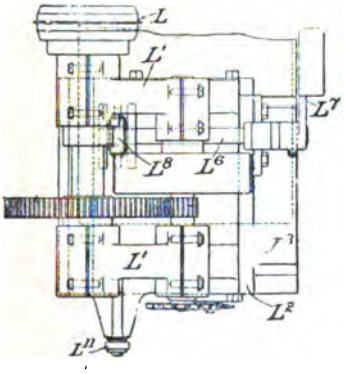


Fig. 399.

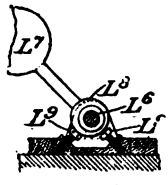


Fig. 400.

exemple, le rochet M_4 (fig. 398) que G' fait, par M, tourner d'une dent par dent de D_4, bascule le passe-courroie M_5, qui arrête la machine.

Digitized by Google

La fraise de grand diamètre (190 millimètres au cas figuré) est constituée par un grand nombre de dents maintenues entre deux plateaux et serrées par des vis de pression. Ces dents sont affûtées, ajustées et calibrées au moyen d'un petit outillage spécial qui en assure l'exécution et le montage absolument précis (1). Elle marche à la vitesse de 40 tours par minute et s'use très peu. Cette machine peut tailler des pignons jusqu'à 150 millimètres de diamètre et se prête parfaitement à la fabrication rapide et en

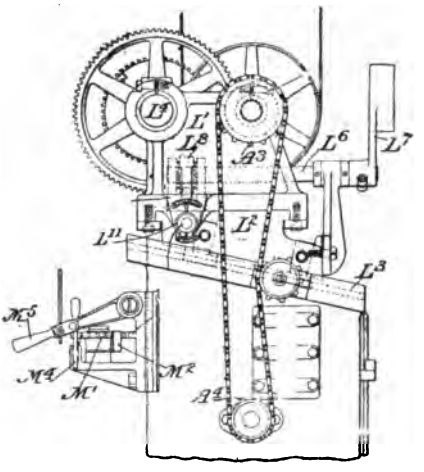


Fig. 401.

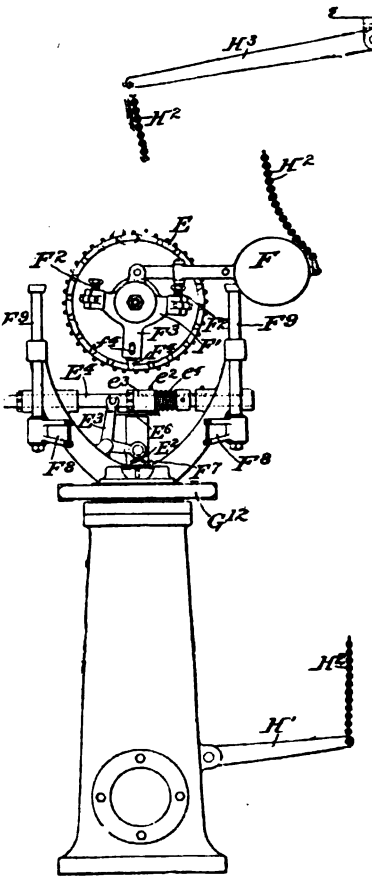


Fig. 402.

série d'engrenages de mêmes dimensions et rigoureusement interchangeables.

(1). American Machinist, 20 Mai 1900.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE PREMIER

Transmission par contact immédiat.

CHAPITRE PREMIER (pages 1 à 5).

Définitions préliminaires. — Classification des mécanismes.

1. Mécanisme, machine. — 2. Degré de liberté d'un système. — 3. Couples d'éléments cinématiques. — 4. Chaînes cinématiques. — 5. Chaîne simple, chaîne composée. — 6. Classification des mécanismes.

CHAPITRE II (pages 6 à 66).

Théorie des engrenages cylindriques extérieurs.

7. Cylindres de friction. — 8. Roues à coins. — 9. Pas circonférentiel. — 10. Projet d'engrenage cylindrique. — 11. Recherche des profils des dents. — 12. Méthode des enveloppes. — 13. Tracé de Poncelet. — 14. Tracé de Reuleaux. — 15. Méthode des roulettes. — 16. Arcs d'approche, de retraite, de conduite. — 17. Flancs et faces des dents. — 18. Détermination de l'arc de conduite. — 19. Circonférences d'échanfrinement et d'évidement des dents. — 20. Phénomène d'arc-boutement des engrenages. — 21. Coinçage. — 22. Calcul de l'arc élémentaire et de l'arc total de glissement relatif de deux dents en contact. — 23. Engrenage à profils épicycloïdaux. — 24. Engrenage à flancs rectilignes et à courbes épicycloïdales. — 25. Engrenage à développantes de cercle. — 26. Engrenage à lanterne. — 27. Engrenage à flancs rectilignes divergents. — 28. Engrenage à denture mixte. — 29. Tracés approchés. — 30. Avantages et inconvénients des tracés rigoureux qui permettent l'établissement des roues d'assortiment.

CHAPITRE III (pages 67 à 74).

Notation nouvelle du pas des engrenages.

31. Pas diamétral. — 32. Application. — 33. Minimum de dents du plus petit pignon d'une série. — 34. Influence de l'obliquité de la ligne d'engrènement dans les engrenages à développantes. — 35. Calcul de l'interférence. — 36. Nombre de dents en contact.

CHAPITRE IV (pages 75 à 88).

Théorie des engrenages cylindriques intérieurs.

37. Problème général. — 38. Denture épicycloïdale. — 39. Denture épicycloïdale à

Digitized by Google

flancs rectilignes. — 40. Denture à développantes de cercle. — 41. Engrenage à lanterne. — 42. Denture à flancs rectilignes divergents. — 43. Tracé Willis par un arc de cercle. — 44. Tracé Willis par deux arcs de cercle.

CHAPITRE V (pages 89 à 97).

Pignons et crémaillères.

45. Tracé d'une cycloïde. — 46. Problème général. — 47. Denture épicycloïdale. — 48. Denture épicycloïdale à flancs rectilignes. — 49. Denture à développantes de cercle. — 50. Denture à fuseaux. — 51. Denture à flancs rectilignes divergents. — 52. Tracé Willis par un arc de cercle. — 53. Tracé Willis par deux arcs de cercle.

CHAPITRE VI (pages 98 à 108).

Engrenages coniques ou roues d'angle.

54. Problème général. — 55. Problème. — 57. Nature des dents et détermination de leurs profils. — 58. Denture épicycloïdale. — 59. Denture à développantes. — 60. Denture à flancs circulaires. — 61. Denture de Tredgold. — 62. Exécution de l'épure des dents. — 63. Série de roues coniques. — 64. Problème. — 65. Application.

CHAPITRE VII (pages 109 à 125).

Engrenages hyperboloïdes.

66. Problème général. — 68. Tracé d'un engrenage hyperboloïde. — 69. Tracé approché.

CHAPITRE VIII (pages 126 à 155).

Engrenages hélicoïdaux.

70. Généralités. — 71. Recherche des surfaces des dents des deux roues. — 72. Engrenage de White. — 73. Engrenage à gradins de Hooke. — 74. Roues chevronnées. — 75. Engrenage « Kosmos » à chevrons fraisés d'une seule pièce. — 76. Engrenages coniques hélicoïdaux. — 77. Recherche des courbes lieux des contacts des dents. — 78. Surface des dents. — 79. Roues à simples, doubles... chevrons. — 80. Roue conique à gradins. — 81. Engrenages hyperboliques hélicoïdaux. — 82. Courbes lieux des points de contact des dents. — 83. Définitions. — 84. Calculs des différents éléments d'un engrenage hélicoïdal. — 86. Engrenage d'une roue et d'une crémaillère. — 87. Engrenage de deux crémaillères.

CHAPITRE IX (pages 156 à 174).

Vis et écrou. — Roue et vis sans fin.

88. Problème général. — 89. Cylindre à rainure conduisant une tige à bouton. — 90. Problème. — 91. Tracé mécanique d'une hélice. — 93. Transmission par vis et peigne. — 94. Transmission par vis et écrou. — 95. Vis de pression. — 96. Vis de rappel. — 97. Vis calantes. — 98. Vis d'Archimède. — 100. Roue et vis sans fin. — 101. Recherche de la vis et de la roue. — 102. Vis tangente. — 103. Vis à filets convergents.

CHAPITRE X (pages 175 à 186).

Trains d'engrenages ou équipages de roues dentées.

104. Définition d'un train. — 105. Raison d'un train. — 106. Calcul de la raison d'un train en fonction des nombres de dents des roues qui le constituent.— 108.

Digitized by Google

Recherche d'un train qui correspond à une raison donnée. — 109. Applications. — 110. Rouage lunaire. — 111. Rouage solaire. — 112. Tour à fileter. — 113. Applications.

CHAPITRE XI (pages 187 à 202).

Trains épicycloïdaux.

114. Définition. — 115. Problème. — 116. Formule de Willis. — 117. Tracé des épicycloïdes et hypocycloïdes. — 118. Engrenage de Lahire. — 119. Problème. — 120. Train épicycloïdal de Pecqueur. — 121. Application. — 122. Paradoxe de Fergusson. — 124. Train épicycloïdal à deux bras de levier. — 125. Train épicycloïdal sphérique. — 126. Différentiel à roues cylindriques de M. Villeminot. — 127. Différentiel de Pecqueur.

CHAPITRE XII (pages 203 à 221).

Surfaces roulantes.

128. Problème général. — 129. Problème. — 130. Problème. — 131. Problème. — 132. Engrenage elliptique. — 133. Application à la bicyclette. — 134. Surfaces dérivées. — 135. Surfaces roulantes dérivées des cylindres elliptiques. — 136. Roue excentrée engrenant avec une roue à peu près elliptique. — 137. Engrenage à retour rapide. — 138. Système Osgood. — 139. Système Richards et Cie. — 140. Mécanisme employé en Amérique par la Rhodes Company pour la commande des soufflerie d'orgues. — 141. Engrenages intermittents. — 142. Système Clément.

CHAPITRE XIII (pages 222 à 255).

Cames et excentriques.

143. Définition. — 144. Cames des marteaux frontaux, à bascule et à l'allemande. — 145. Distance de deux cames successives. — 146. Cames des bocards et des pilons. — 148. Problème général. — 149. Came en cœur. — 156. Came à mouvement uniforme intermittent. — 157. Came Morin. — 159. Came imprimant à la tige un mouvement varié à accélération continue. — 160. Came pour machines à vapeur et pour moteurs Charon. — 161. Came communiquant à la tige des mouvements direct et rétrograde différents. — 162. Came communiquant à la tige deux courses complètes pendant une révolution de l'arbre moteur. — 163. Came transformant une rotation continue en une translation dans le cas où les axes se rencontrent. — 165. Cas où les axes ne se rencontrent pas, mais sont rectangulaires. — 166. Nature du contour d'un excentrique à cadre. — 167. Théorème. — 168. Excentrique triangulaire. — 172. Excentrique triangulaire pouvant se caler sur l'arbre. — 175. Excentrique Trézel. — 178. Excentrique circulaire. — 181. Tige à coulisse. — 182. Crémaillère double. — 183. Mécanismes à rainures.

LIVRE II

Transmissions par lien rigide.

CHAPITRE PREMIER (pages 257 à 267).

Généralités sur les systèmes articulés plans.

184. Définition. — 185. Pivot à révolution complète. — 186. Problème. — 187. Théorème. — 188. Quadrilatères ayant trois ou quatre pivots à révolution complète. — 189. Énumération des transformations de mouvements obtenus à l'aide d'un quadrilatère articulé. — 190. Mécanismes déduits du quadrilatère articulé.

Digitized by Google

CHAPITRE II (pages 268 à 270).

Généralités sur les points morts.

191. Manière de franchir les points morts.

CHAPITRE III (page 271).

Liaison de deux rotations.

192. Transformation d'une rotation continue en une rotation continue avec rapport de vitesses angulaires constant.

CHAPITRE IV (pages 272 à 295).

Liaison de deux rotations.

193. Transformation d'une rotation continue en une rotation continue avec rapport de vitesses angulaires variable par quadrilatères articulés. — 194. Même transformation par la liaison d'une manivelle à bouton et d'une manivelle à coulisse. — 195. Transformation d'une rotation continue en une rotation alternative par quadrilatère articulé. — 196. Même problème par la liaison d'une manivelle à bouton et d'une manivelle à coulisse. — 196 *bis*. Transformation d'une rotation alternative en une rotation alternative.
197. Joint universel. — 198. Double joint de Hooke. — 199. Joint de Cardan. — 200. Joint Goubet. — 201. Joint Clemens. — 202. Joint d'Oldham.

CHAPITRE V (pages 296 à 302).

Liaison d'une rotation et d'une translation.

203. Engrenage de Lahire. — 204. Système articulé bielle et manivelle. — 205. Excentrique circulaire à collier. — 206. Machine à cylindre oscillant.

CHAPITRE VI (pages 303 à 313).

Mécanismes à retour rapide.

207. Bielle reliant deux manivelles égales. — 208. Retour rapide au moyen du contre-parallélogramme. — 209. Mécanisme à retour rapide appliqué aux limeuses. — 210. Retour rapide dans les machines à raboter. — 211. Dispositif à retour rapide avec phases de repos aux deux extrémités de la course.

CHAPITRE VII (pages 314 à 320).

Manivelles multiples.

212. Définitions. — 213. Courbes du travail d'une manivelle simple marchant : 1° à simple effet ; 2° à double effet. — 214. Courbes du travail d'une manivelle double à simple effet travaillant en montant. — 215. Courbes du travail d'une manivelle double à double effet. — 216. Courbes du travail d'une manivelle triple à 120° à simple ou à double effet.

CHAPITRE VIII (pages 321 à 339).

Théorie des parallélogrammes.

217. Définition. — 218. Parallélogramme simple de Watt. — 219. Parallélogramme composé de Watt. — 220. Parallélogramme pour bateaux. — 221. Parallélogramme

Digitized by Google

de Tchébicheff. — 222. Parallélogramme de Bourdon. — 223. Parallélogramme d'Olivier Ewans. — 224. Parallélogramme de Klérity. — 225. Parallélogramme de Peaucellier. — 226. Parallélogramme de Hart. — 227. Parallélogramme de Perrolaz.

LIVRE III

Transmissions par l'intermédiaire d'un lien flexible.

CHAPITRE PREMIER (pages 341 à 376).

Transformation d'une rotation continue en une rotation continue avec rapport de vitesses angulaires constant.

228. Définitions. — 229. Théorème. — 230. Transmission par courroies se guidant elles-mêmes. — 232. Transmissions par câbles textiles. — 233. Transmissions par câbles métalliques. — 234. Transmissions par chaînes. — 235. Transmission par cônes.

236. Poulie fixe. — 237. Poulie mobile. — 238. Équipage de poulies. — 239. Mouffles, mouflettes, palans. — 240. Équipage de palans. — 241. Palan de White. — 242. Palan Moore.

243. Vis de Prony. — 244. Vis à pas contraires. — 245. Palan différentiel. — 246. Treuil différentiel. — 247. Machine à aléser horizontale. — 248. Machine à aléser verticale.

CHAPITRE II (pages 377 à 380).

Étude de quelques treuils.

249. Treuil ordinaire. — 250. Treuil composé à double engrenage. — 251. Treuil employé dans les mines.

CHAPITRE III (pages 381 à 398).

Compteurs de tours, cinémomètres, tachymètres.

253. Compteurs de tours. — 254. Compteurs de tours Schaeffer et Budenberg. — 255. Compteur de tours Deschiens. — 256. Cinémomètre Duveau. — 257. Cinémomètre Richard. — 258. Chronotachymètre P. L. M.

NOTE DE M. RICHARD SUR LES MACHINES A TAILLER LES ENGRENAGES (pages 399 à 414).

Machine de Gould et Eberhardt. — Machine de Los Rice.

CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google